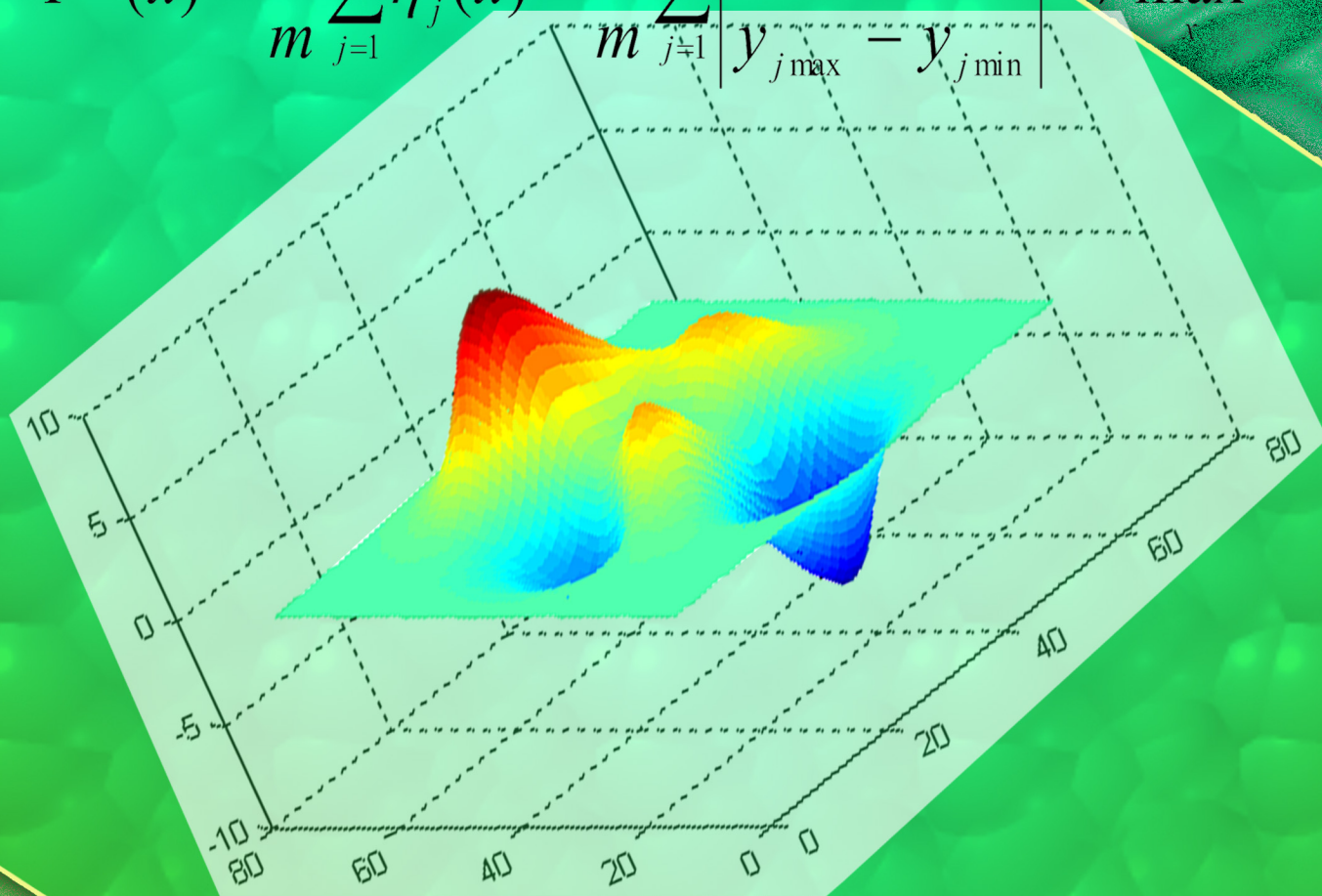


МНОГОКРИТЕРИАЛНО ВЗЕМАНЕ НА РЕШЕНИЯ

$$F^p(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \eta_j(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j(x) - y_j^{pes}}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right| \rightarrow \max_x$$



$$F^o(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\Delta y_j(x)| = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j^* - y_j(x)}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right| \rightarrow \min_x$$

ЕЛЕНА МОНОВА
СТОЯН СТОЯНОВ

Габрово 2025

Елена Монова

Стоян Стоянов

МНОГОКРИТЕРИАЛНО ВЗЕМАНЕ НА РЕШЕНИЯ



УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО

“ВАСИЛ АПРИЛОВ”

ГАБРОВО, 2025

Многокритериално вземане на решения

© Елена Димитрова Монова – автор, 2025

© Стоян Колев Стоянов – автор, 2025

Рецензент: доц. д-р инж. Драгомир Пенков Чантов

© Университетско издателство “Васил Априлов” – Габрово, 2025

ISBN: 978-954-683-733-2

Предговор

Учебникът по „Многокритериално вземане на решения“ е съпътстващ едноименната дисциплина, включена в учебния план на специалност „Автоматика, информационна и управляваща техника“ ,ОКС „магистър“ при Технически университет – Габрово.

В учебника са включени теми, свързани с решаване на многокритериални задачи и намиране на оптимално решение при наличие на множество целеви показатели на качеството. Формулирана е задачата за многоцелева оптимизация и са разгледани най-често използваните стратегии за решаването на тези задачи – оптимистична стратегия, песимистична, рамкова. Включени са задачи, решени с помощта на всяка от разгледаните стратегии.

Разгледана е темата, свързана с определяне на приоритети и тегловни коефициенти за показателите на качеството, както и въпроса с оценяване на удовлетвореността на клиентите (потребителите) от показателите на качеството.

В учебника е включена и тема за вземане на решения при размити цели и размити условия, варианти за числено представяне на лингвистично описани цели, както и методи и алгоритми за вземане на решения при непълна информация.

Разгледан е още въпроса за информационно обезпечаване при оптимално вземане на решения - литературно и друго проучване, задаване на въпроси, събиране на информация и данни, провеждане на експерименти, статистическа обработка на резултатите и т.н.

Съдържание

Съдържание	4
Въведение.....	6
Многокритериално вземане на решения. Формулировка на задачата. Парето оптимални решения. Примери.....	8
1.1. Формулировка на задачата за многоцелева оптимизация.....	10
1.2. Методи за вземане на решения при наличие на многокритериална задача.....	17
Стратегии на препоръчаното решение. Оптимистичен, песимистичен и рамков подход.....	19
2.1. Формулировка на задачата за многоцелева оптимизация.....	19
2.2. Стратегия на препоръчаното решение. Оптимистичен подход.....	20
2.3. Стратегия на препоръчаното решение. Песимистичен подход.....	28
2.4. Стратегия на препоръчаното решение. Рамков подход.....	35
Определяне на приоритети и тегловни коефициенти за показателите на качеството.....	40
3.1. Оценка на субективни мнения.....	40
3.2. Определяне на приоритети и тегловни коефициенти чрез ранжиране на индикаторите на качеството.....	42
3.3. Оценяване на удовлетвореността на клиентите от показателите на качеството.....	68
Вземане на решения при размити цели и размити условия. Числено представяне на лингвистично описани цели.....	75
4.1. Лингвистично описани цели.....	75
4.2. Графична трансформация на лингвистично описаните цели.....	76
Методи и алгоритми за вземане на решения при непълна информация.....	83

5.1. Непълна информация.....	83
5.2. Стратегии за решаване на оптимизационни задачи при непълна информация.....	85
5.3. Формулировка на оптимизационната задача.....	86
5.4. Стратегии, базирани на чувствителността на решението към неопределеностите.....	87
5.5. Стратегии, базирани на вероятностните характеристики на неопределените параметри	90
5.6. Минмаксни стратегии.....	92
Информационно обезпечаване при оптимално вземане на решения.....	94
Литература.....	97

Въведение

В съвременния свят вземането на решения рядко се свежда до избор, основан само на един критерий. Независимо дали става дума за икономика, инженеринг, мениджмънт, обществени науки или екология, реалните проблеми изискват оценка и съпоставяне на множество, често противоречиви, критерии или показатели. Именно в такива случаи на помощ идва многокритериалното вземане на решения, което представлява съвкупност от методи и подходи, насочени към системно и обосновано намиране на решения на различни многоцелеви задачи.

Многокритериалното вземане на решения е интердисциплинарна област, която обединява идеи от математическото моделиране, икономиката, медицината, промишлеността и компютърните науки. Основната цел е да се подпомогне лицето, вземащо решения (decision-maker), в процеса на събиране на информация, оценяване, дефиниране на целева функция, избор на подход за решаване на задачата и т.н., като се вземат предвид различни алтернативи и критерии.

Типични примери за многокритериални задачи включват: избор на оптимално местоположение за нова производствена база с оглед на цена, транспортна достъпност и екологично въздействие; оценка на инвестиционни проекти според възвращаемост, риск и социален ефект; избор на структура, планиране на дейности и оптимална организация при обслужването в болнично заведение; както и подбор на персонал по умения, опит и личностни качества. Във всички тези случаи няма една-единствена „най-добра“ алтернатива, а решението зависи от субективни предпочитания и приоритети.

Настоящият учебник има за цел да запознае студентите с основните принципи и методи на многокритериалния анализ. Представени са както класически техники като стратегиите на препоръчаните решения, така и методите за вземане на решения при системи с непълна информация, и е разгледана последователността за ранжиране на приоритетите и определяне на тегловни коефициенти. Теоретичните постановки са

съпроводени с практически многокритериални проблеми и начина за намиране на решението им.

Разбирането и прилагането на многокритериални методи не само подобрява качеството на решенията, но и спомага за по-прозрачен и обективен процес при работа в условия на несигурност, ограничени ресурси и конфликти между целевите параметри. В този смисъл, овладяването на подходите за многокритериалното вземане на решения е ключово умение за всеки специалист, изправен пред сложни и стратегически значими избори.

Многокритериално вземане на решения.

Формулировка на задачата.

Парето оптимални решения. Примери.

Многокритериалното вземане на решения (на английски: multiple-criteria decision-making, multicriteria decision-making (MCDM)) или многокритериален анализ на решенията (multiple-criteria decision analysis, multicriteria decision analysis (MCDA)) е част от областта на изследване на операциите, която се занимава с оценяването на обекти или ситуации по множество взаимноизключващи се (противоречащи си) критерии. Многокритериалното вземане на решения намира приложения в икономиката, промишлеността, медицината, управлението, но също и във всякакви житейски ситуации. Например, два от основните критерия за вземане на решения са цена и качество, като двете категории обичайно са взаимноизключващи се.

В ежедневието хората имплицитно (неявно) претеглят множество критерии, които участват в преценката им, и обикновено намират за удовлетворителни последиците от тези решения, взети само на базата на интуиция. От друга страна, когато залогът е висок, е важно проблемът да се структурира и множеството свързани с решаването му критерии да бъдат експлицитно (явно) оценени, което води до по-информирани и по-добре обосновани решения.

Като съвременна научна дисциплина многокритериалното вземане на решения се обособява в началото на 60-те години на XX век. Оттогава до днес датират голям брой важни открития в областта, множество разнообразни методи са формално описани с математически средства и са разработени голям брой специализирани софтуерни приложения. Многокритериалното вземане на решения черпи знания от различни области: математика, информатика, софтуерно инженерство, икономика.

„Решаването“ на проблема може да се интерпретира по различни начини:

- групиране на алтернативите в няколко групи според предпочитанията на лицето, вземащо решението (decision maker),

- свеждане на решението до малка група добри алтернативи, или
- избор на една най-добра измежду множество от добри алтернативи.

Задачите за многокритериално вземане на решение са свързани с едновременната оптимизация на няколко на брой критерия в определно множество от допустими алтернативи. Т.е., при многокритериалното вземане на решения не съществува едно единствено оптимално решение, а няколко алтернативни решения, всяко от които оптимално по един или няколко (но не едновременно по всички) критерия. Изборът в тези случаи се прави на база предпочитания (или опит, експертност) на лицето, вземащо решението (ЛВР) като се има предвид това, че в общия случай не съществува решение, което да е оптимално и удовлетворява всички зададени критерии. Има множество от решения, които притежават свойството, дефинирано от Vilfredo Pareto, а именно, че всяко подобрене на някой от зададените критерии неминуемо води до влошаване на поне един от останалите критерии.

Едно решение се нарича недоминирано (или още: неутрално, равновесно, Парето-оптимално), ако не е възможно да бъде подобрено по един или няколко критерия без същевременно да се влоши по един или няколко от останалите критерии. Следователно, за лицето, вземащо решението, е смислено да избере едно от недоминираните решения. В общия случай, множеството от недоминираните решения е твърде голямо, т.е. от полза е на вземащия решения да се предоставят и инструменти, с които да сведе избора си до разумен брой предпочитани алтернативи, като предпочитанието по един от критериите непременно означава компромис по някой друг критерий.

В зависимост от момента на формулиране на предпочитанията, се различават три групи методи за многокритериално вземане на решения:

- Някои от методите за многокритериално вземане на решения изискват предварително да са известни предпочитанията на лицето, което взема решението, с което задачата може да се сведе до задача за еднокритериално вземане на решение. За тези методи се казва, че оперират при „априорно артикулиране на предпочитанията“, или формално чрез

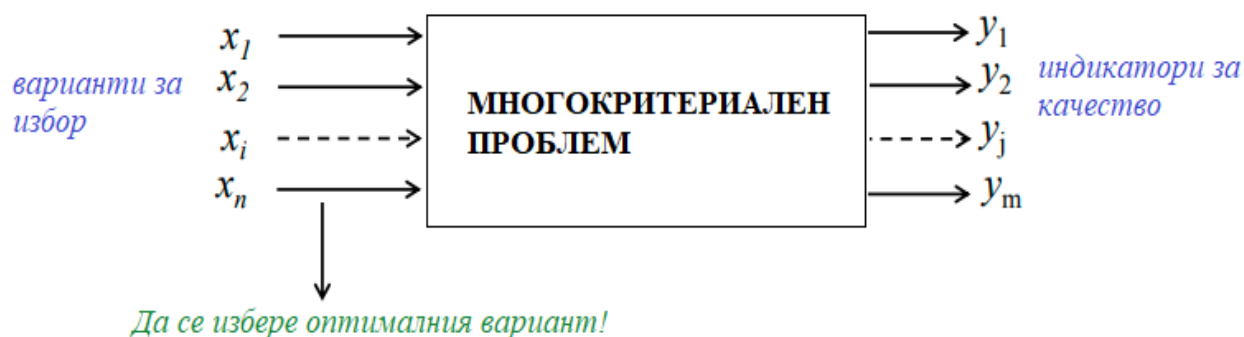
построяване на оценъчна функция. Един от най-широко ползваните такива методи е т.нар. целево програмиране (goal programming).

- Други методи изискват информацията за предпочитанията на лицето, вземащо решения, да се подава по време на целия процес на решаване на многокритериалната задача. Този вид методи са известни като интерактивни методи или методи, които изискват „прогресивно артикулиране на предпочитанията“.

- Последно, някои задачи типично изискват представянето или апроксимирането на „ефикасните решения“, т.е. постериорно артикулиране на предпочитанията. При тези задачи лицето, вземащо решения, формулира предпочитанията си едва след като му бъдат експлицитно представени „интересните“ възможни решения, т.е. в зависимост от избора на алтернативи, до които се свежда задачата за вземане на решения, се формулират и важните за вземащия решения критерии.

1.1. Формулировка на задачата за многоцелева оптимизация

Има различни задачи за многоцелева оптимизация – и линейни, и нелинейни. Независимо от това каква е задачата, в общия случай е необходимо да бъдат зададени показателите/индикаторите за качество (y_j), на базата на които трябва да бъде решена задачата, т.е. да бъде намерен оптималния вариант x_i .



фиг.1.1

За да може лицето, вземащо решение да избере крайния вариант, обикновено изходните данни се представят в табличен вид и получените

допустими решения на задачата се подреждат по определен ред, който подпомага лицето за вземане на решението.

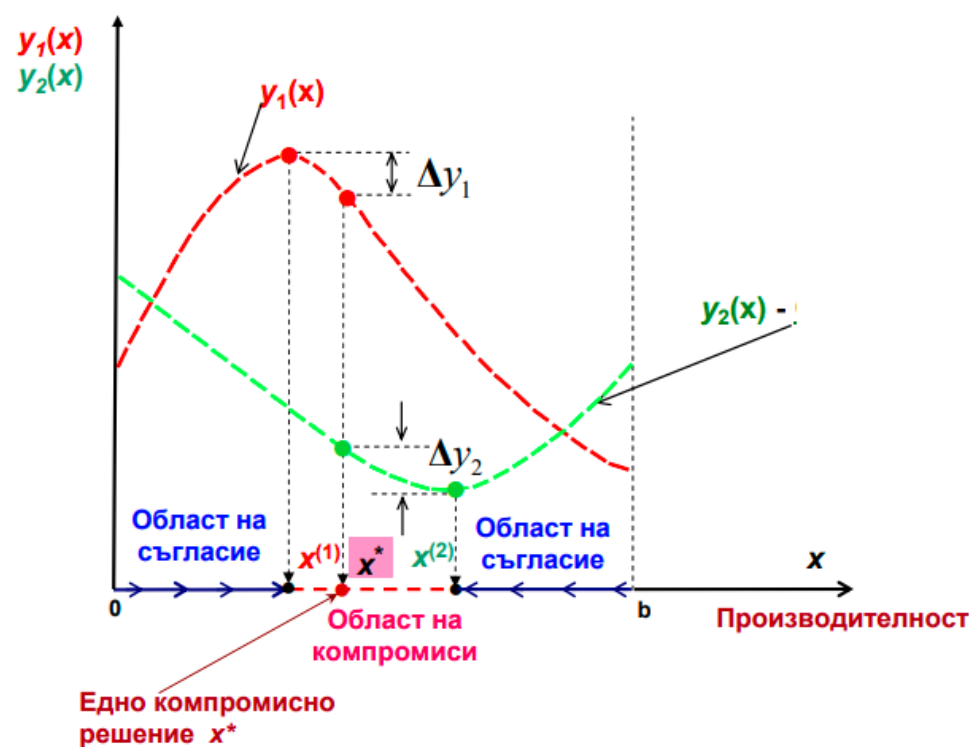
Да се намери решение

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X_0 \quad (1.1)$$

за което изискванията за индикаторите на качеството ще се удовлетворят максимално

$$y^* = [\max_{x \in X_0} y_1(x), \max_{x \in X_0} y_2(x), \dots, \max_{x \in X_0} y_m(x)] \quad (1.2)$$

При задачите за многокритериално вземане на решение винаги има особености, свързани с т.нар. компромисни решения (фиг.1.2).



фиг.1.2

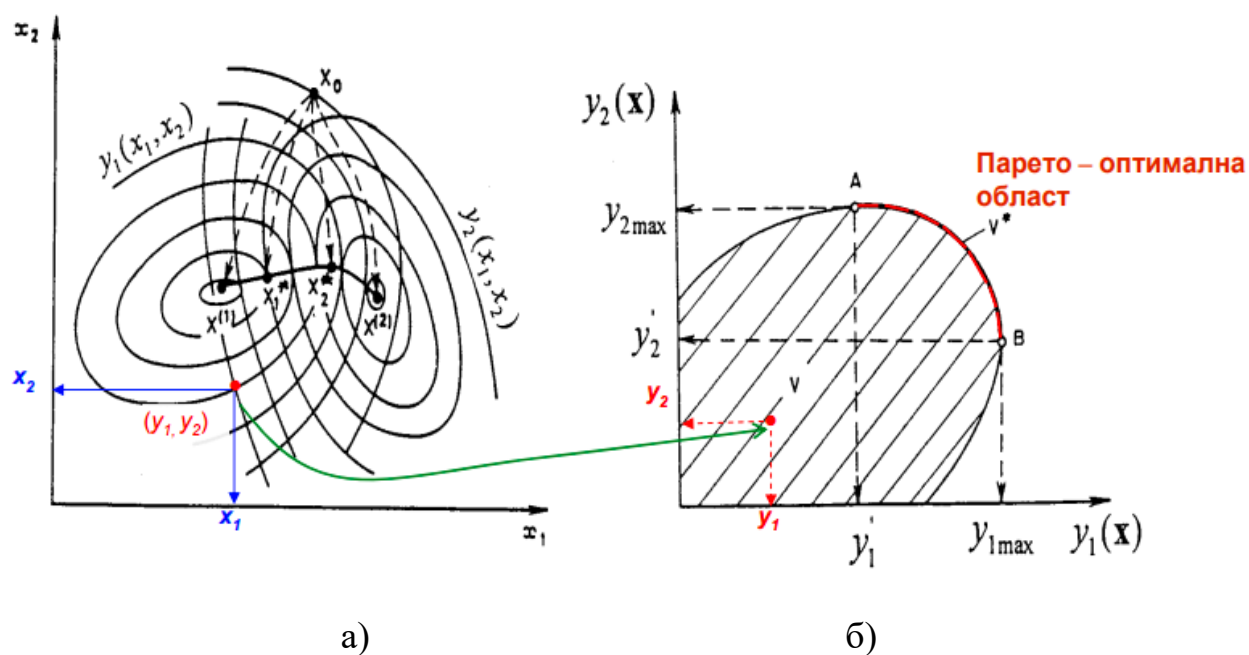
Парето - оптимални решения

Парето-оптималното решение (Парето-оптималното управление) притежава следното свойство: всяко отклонение от него с цел подобряване на един или на няколко критерия води до влошаване на поне един или на няколко от останалите критерии.

Парето-оптималните решения се наричат още ефективни, недоминиращи, неподбръзващи се, компромисни или приемливи.

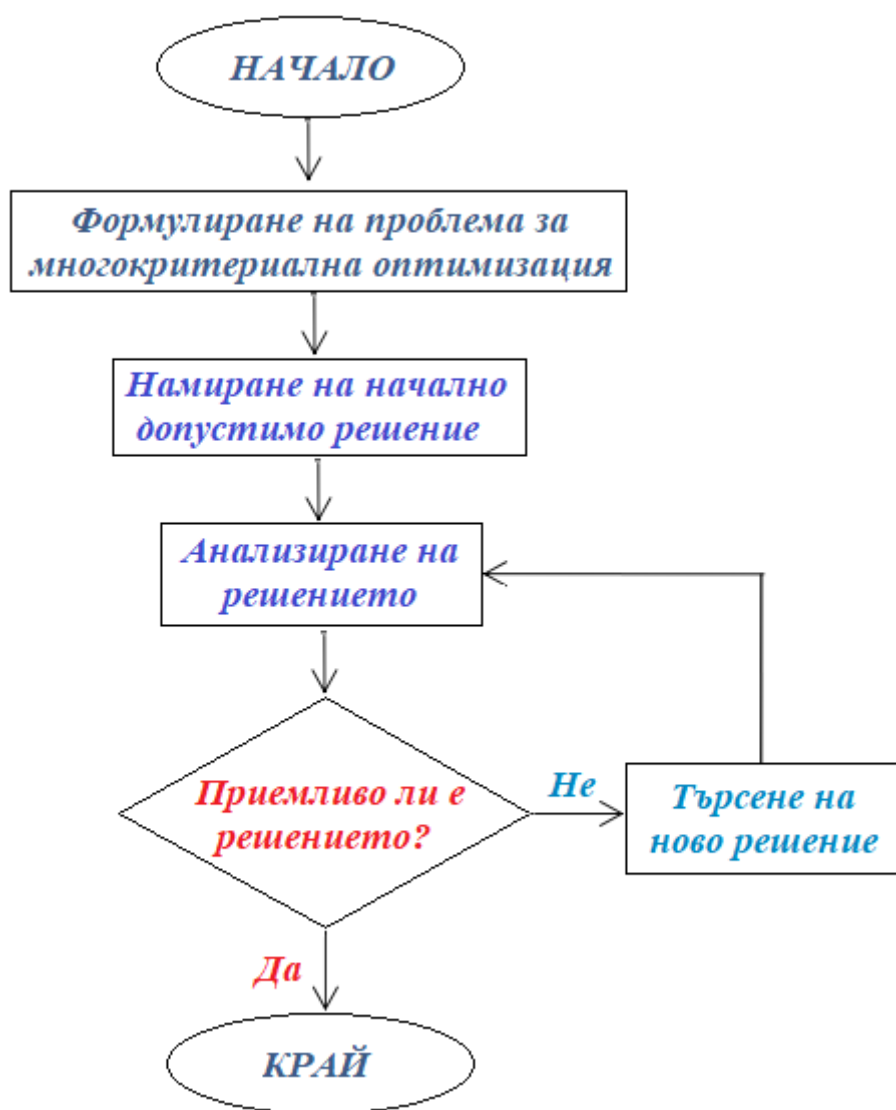
На фиг.1.3 е представена графично възможността за определяне на множеството от Парето - оптимални решения за два целеви параметри - y_1 и y_2 , като и двата зависят от управляващите параметри x_1 и x_2 . Вижда се, обаче, че екстремумите им не съвпадат в една и съща точка (в случая няма значение дали за тези показатели се търси минимум или максимум).

Търсейки решение, което да удовлетворява и двата критерия (y_1 и y_2), стъпваме на линията между $x^{(1)}$ (решение, удовлетворяващо в максимална степен показател y_1) и $x^{(2)}$ (решение, удовлетворяващо в максимална степен показател y_2). Характерното в случая е, че избирайки кое да е решение, лежащо на нея, ако се опитаме да подобрим параметъра y_1 , това ще доведе до влошаване на y_2 и обратното. Решенията, принадлежащи на тази крива, се наричат компромисни или Парето-оптимални решения и се подчиняват на описаното свойство.



фиг.1.3

Ако бъде избрана друга комбинация за управляващите параметри (например стойностите отбелязани с x_1 и x_2), се получава точка V (фиг.1.3б). За нея, както и за други точки от заштрихованата област е валидно правилото, че могат да бъдат подобрявани едновременно и двата целеви показателя (y_1 и y_2), както и да се задържи стойността на единия от тях, докато другият се подобрява. Това е възможно до линията между точките A и B, която представлява т.нар. Парето-оптимална област.



фиг.1.4

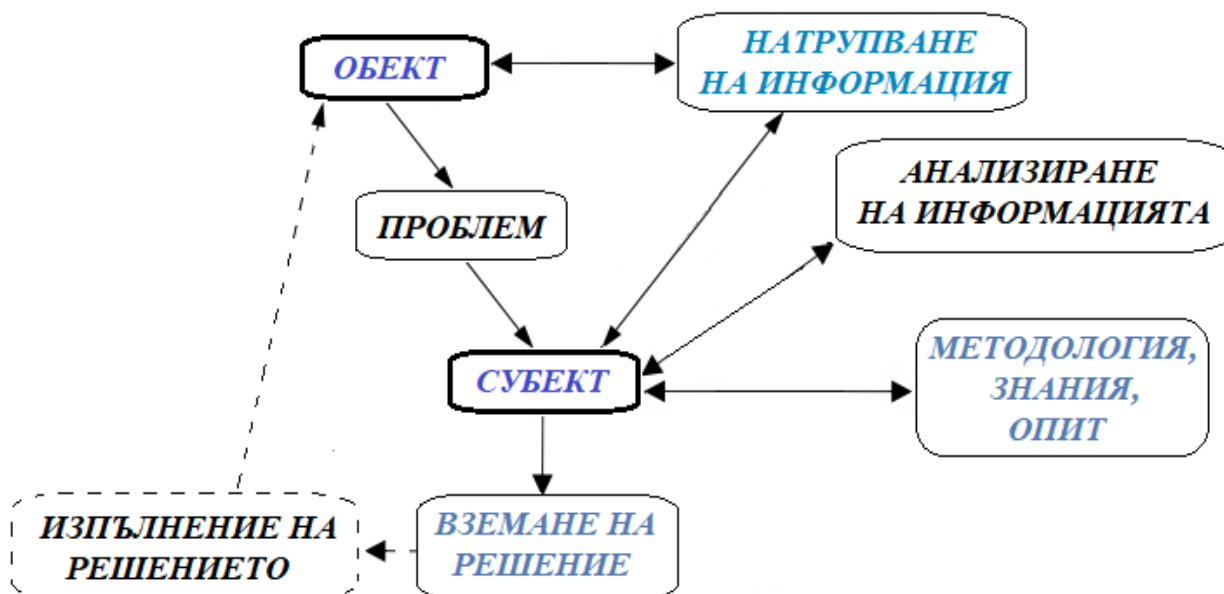
На фиг. 1.4 е представен алгоритъма за намиране на компромисно решение (Парето-оптимално решение), който се състои от няколко основни стъпки:

- формулиране на проблема за оптимизация при наличието на много критерии (какви са управляващите параметри, какви са целевите показатели, кои са най-важните от тях, в какви граници могат да се изменят);
- намиране на първоначално допустимо решение (Парето-оптимално решение);
- анализиране на решението и съответно приемане на полученото решение или търсене на ново такова.

Обикновено, за да може да се намали времето за достигане на крайното решение, първоначално се предлага повече от едно решение.

Организацията на процеса на вземане на решение може да бъде разделено на следните етапи (фиг.1.5):

- първоначално натрупване на информация за разглеждания проблем
- последващо анализиране на събраната информация;
- натрупване на знания и опит;
- вземане на решение на база горепосоченото.



фиг.1.5

На фиг. 1.5 е показана организацията на процеса на вземане на решение. Има обект, за който съществува някакъв проблем. Проблемът се решава от субекта. Но за да се реши е необходимо първоначално запознаване с обекта, изучаване, натрупване на информация за него. Следва анализиране на цялата събрана информация.

За да може в крайна сметка субектът да стигне до някакво решение, е много важно той да притежава знания и опит в областта на оптималното вземане на решения. На база на тях, субектът взема решение, което да бъде приложено за преодоляване на дадения проблем.

За да вземе адекватно решение, съответното лице взаимодейства както с мениджъра, така и с клиента, доставчика и т.н. (фиг.1.6). Това е необходимо за да може да се удовлетворят максимално изискванията на всички заинтересовани страни.

За лицето, вземащо решение има различни варианти. Единият вариант е това да е човек или група от хора, които предлагат компромисното решение. Вторият вариант е това да са човек или група от хора, които вземат компромисното решение. И трети вариант е човек, който решава многокритериалната задача и взема крайното решение.



фиг.1.6

В повечето случаи работещите по проблема и предлагащите варианти за решение са група от хора, но вземащият крайното решение е едно лице. Обикновено на него биват предлагани повече от едно решения (от множеството на допустимите решения), от които лицето избира най-предпочитания вариант на база удовлетворяване на определени критерии на качеството или лични предпочитания.

1.2. Методи за вземане на решения при наличие на многокритериална задача

Многокритериалните задачи за вземане на решение могат да бъдат решавани чрез скаларизация (по-често срещания подход) или чрез апроксимация.

При варианта за решаване на задачата чрез скаларизация, основен акцент има лицето, вземащо решение, т.к. от него зависи крайният избор.

Това, с което обикновено трябва да се направи при наличие на многокритериална задача, е скаларизирането на векторния критерий (многого целеви параметри) до един целеви показател или свеждането на многокритериалната задача до една целева функция зависища от един или няколко параметъра.

$$\max_{x \in X_0} \Phi(x) = \max_{x \in X_0} \{ f[y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)] \} \quad (1.5)$$

Обобщената функция (скаларизираната функция), която се получава, има за цел да намери максимумите на всички тези показатели.

Съществуват много стратегии, които могат да бъдат приложени при избора на оптималното решение. Такива са:

- Стратегия с използване на функцията на загубите;
- Стратегия с използване на функцията на полезност;
- Стратегия с използване на обобщена функция на загубите и полезност;
- Стратегия с използване на функцията на съжалението;
- Стратегия с използване на функцията на желателност;
- Стратегия с използване на функцията на рационалност.

Първите три стратегии са най-често използваните и са известни като подходи на препоръчаните решения.

- Метод на загубите или Оптимистичен подход

При този подход се изследват загубите, които ще претърпим при вземане на дадено решение. За да могат да бъдат оценени те, се задават

„оптимистични“ или „високи“ изисквания за препоръчаните стойности Y_j^* на целевите параметри (качествените показатели) $Y_j(x)$ и се минимизират загубите, т.е. недостига до тях.

- Метод с функция на полезност или Песимистичен подход

Този подход е точно обратното на предходния и при него се проверява колко ще е полезен този резултат (взетото решение) при всичките критерии. Нарича се "песимистичен", тъй като се задават "песимистични" или минимално допустими изисквания за препоръчаните стойности Y_j^{pes} на целевите параметри $Y_j(x)$ и се максимизират надхвърлянията над тях, наречени „полезност“ ($\eta_j \rightarrow \max$).

- Рамков подход (Bracketing approach)

Този подход използва обобщена функция и на загуби, и на полезност. Той обединява методите на функцията на загуби и функцията на полезност, т.е. на оптимистичния и песимистичния подход - максимизиране на надхвърлянията над песимистично зададената препоръчана стойност Y_j^{pes} и за минимизиране на загубите от оптимистично зададената препоръчана стойност Y_j^* за целевия показател $Y_j(x)$ и намиране на компромисно решение по рамковия подход Y_j^{kp} .

Стратегии на препоръчаното решение. Оптимистичен, песимистичен и рамков подход

При решаване на многокритериални задачи и намирането на оптимално решение, съществуват различни стратегии. Такива, например, са: стратегия с използване на функцията на загубите, стратегия с използване на функцията на полезност стратегия с използване на обобщена функция на загубите и полезност, стратегия с използване на функцията на съжалението, стратегия с използване на функцията на желателност, стратегия с използване на функцията на рационалност и др.

2.1. Формулировка на задачата за многоцелева оптимизация

Основното при многокритериалните задачи е наличието на няколко (повече от един) индикатора на качество (критерия), които трябва да бъдат удовлетворени в определена (максимална) степен.



фиг.2.1

Целта на многоцелевата оптимизация е да се намери такова решение x^*

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X_0, \quad (2.1)$$

за което максимално да се удовлетворят изискванията за показателите на качеството

$$y^* = [\max_{x \in X_0} y_1(x), \max_{x \in X_0} y_2(x), \dots, \max_{x \in X_0} y_m(x)] \quad (2.2)$$

След формулиране на проблема, се пристъпва към избор на стратегия, с помощта на която да бъде намерено оптималното решение.

Съществуват различни подходи за решаване на оптимизационни задачи с няколко целеви показатели на качеството. Поради това, че при тях няма едно единствено решение, в началото се е смятало, че решаването на многоцелевите задачи е некоректно. Но т.к. в практиката се налага решаването на такива задачи, това води до развитието на различни методи за намиране на оптимални решения при наличие на много целеви критерии.

2.2. Стратегия на препоръчаното решение. Оптимистичен подход

Един от често прилаганите методи е този с използване на функцията на загубите или т.нар. оптимистичен метод. При този подход се изследват загубите, които ще претърпим при вземане на дадено решение.

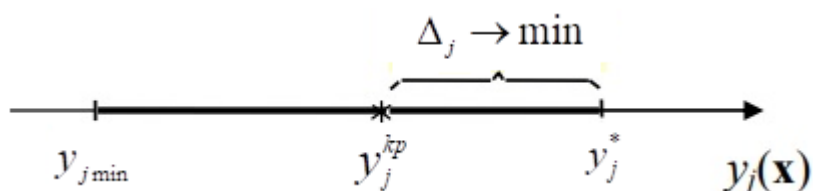
Това, с което обикновено се започва при наличие на многокритериална задача, е скаларизиране на векторния критерий (многоцелеви параметри) до един целеви показател.

$$\max_{x \in X_0} \Phi(x) = \max_{x \in X_0} \{ f[y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)] \} \quad (2.3)$$

Обобщената функция (скаларизираната функция), която се получава, има за цел да намери максимумите на всички тези показатели.

Многоцелева оптимизация по функция на загубите

Този подход се нарича „оптимистичен“, т.к. се задават „оптимистични“ или „високи“ изисквания за препоръчаните стойности y_j^* на целевите параметри (качествените показатели) $y_j(x)$ и се минимизират загубите, т.е. недостига до тях.



фиг.2.2. Минимизиране на загубите от оптимистично зададените препоръчани стойности на целевите параметри y_j^*

Използваните означения са:

y_j^* - оптимистичната стойност за параметъра $y_j(x)$

$y_{j \min}$ - минималната възможна (зададена) стойност на параметъра $y_j(x)$

y_j^{kp} - компромисната стойност за параметъра $y_j(x)$

Δ_j - загубата от най-добрата стойност на параметъра $y_j(x)$

След като бъдат определени тези изисквания, се пресмятат нормираните загуби. Използват се безразмерни стойности за да може по-лесно да се сравняват различните показатели и да се пресмята обобщената функция на полезност.

Вариант 1

Нормирани загуби чрез оптимистично зададените стойности y_j^* за всеки целеви показател $y_j(x)$:

$$\Delta y_j(x) = \frac{y_j^* - y_j(x)}{y_j^*}, \text{ за } j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.4)$$

където y_j^* е безкомпромисната оптимална стойност (най-добрата стойност за дадения показател).

След пресмятане на нормираните загуби за всички целеви показатели, се пресмята и обобщената функция на загубите.

Обобщената целева функция $F^o(x)$ може да бъде получена по два начина:

- 1) Адитивна функция, получена чрез сумиране на квадратите от нормираните загуби и делението им на броя на целевите показатели (средноаритметична стойност от квадратите на нормираните загуби)

$$F^o(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [\Delta y_j(x)]^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[\frac{y_j^* - y_j(x)}{y_j^*} \right]^2 \rightarrow \min_x \quad (2.5)$$

- 2) Адитивна функция, получена чрез сумиране на абсолютните стойности на нормираните загуби и делението им на броя на целевите показатели (средноаритметична стойност от абсолютните стойности на нормираните загуби)

$$F^o(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\Delta y_j(x)| = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j^* - y_j(x)}{y_j^*} \right| \rightarrow \min_x \quad (2.6)$$

И в двата случая компромисното оптимално решение x^* се получава при намиране на минимума на обобщената функция на загубите $F^o(x)$.

Вариант 2

Нормирани загуби чрез максималните и минималните стойности за всеки целеви показател

$$\Delta y_j(x) = \frac{y_j^* - y_j(x)}{y_{j\max} - y_{j\min}}, \text{ за } j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.7)$$

където

- y_j^* е безкомпромисната оптимална стойност;
- $y_{j\max}$ е максималната стойност на j -тия показател;
- $y_{j\min}$ е минималната стойност на j -тия показател.

Обобщената целева функция може да бъде пресметната по два начина:

- 3) Адитивна функция, получена чрез сумиране на квадратите от нормираните загуби и делението им на броя на целевите

показатели (средноаритметична стойност от квадратите на нормираните загуби)

$$F^o(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [\Delta y_j(x)]^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[\frac{y_j^* - y_j(x)}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right]^2 \rightarrow \min_x \quad (2.8)$$

4) Адитивна функция, получена чрез сумиране на абсолютните стойности на нормираните загуби и делението им на броя на целевите показатели (средноаритметична стойност от абсолютните стойности на нормираните загуби)

$$F^o(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\Delta y_j(x)| = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j^* - y_j(x)}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right| \rightarrow \min_x \quad (2.9)$$

Компромисното оптимално решение x^* отново се получава при намиране на минимума на обобщената функция на загубите $F^o(x)$.

Компромисно оптимално решение може да бъде получено и при отчитане на зададени приоритети за всеки от показателите на качеството. В този случай отново се търси минимум на обобщената функция на загубите, която се пресмята по следния начин:

$$F_w^o(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\Delta y_j(x)| (1 - w_j) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j^* - y_j(x)}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right| (1 - W_j) \rightarrow \min_x, \quad (2.10)$$

където W_j е тегловният коефициент за j -тия показател на качеството. Начинът за получаването на тегловните коефициенти е разгледан в следваща глава от учебника.

Пример

За илюстрация на оптимистичния подход и начина на пресмятане на обобщената функция на загубите, в таблицата по-долу са зададени четири целеви параметъра (характеристики на качеството) - y_j ($j=1, 2, 3, 4$).

В Таблицата са дадени изискванията към тези целеви параметри (максимум или минимум), оптимистично препоръчаните стойности y_j^* и границите на изменение за всеки от тях ($y_{j\min}, y_{j\max}$).

За два от целевите параметъра $y_1(\mathbf{x})$ и $y_4(\mathbf{x})$ са желани *максимални стойности*, а за $y_2(\mathbf{x})$ и $y_3(\mathbf{x})$ се търси *минимална стойност*.

Таблица 2.1

	Целеви показатели			
	y_1	y_2	y_3	y_4
Изисквания за y_j	max ↑	min ↓	min ↓	max ↑
Оптимистична препоръчана стойност y_j^*	110	10	1.3	275
Долна граница $y_{j\min}$	70	10	1.3	95
Горна граница $y_{j\max}$	110	45	1.9	275

Формулите за изчисляване на загубите Δ_j от оптимистично зададените (най-желаните) стойности за четирите целеви параметъра изглеждат по следния начин:

$$\Delta_1(\mathbf{x}) = \frac{y_1^* - y_1(\mathbf{x})}{y_{1\max} - y_{1\min}} = \frac{110 - y_1(\mathbf{x})}{110 - 70}$$

$$\Delta_2(\mathbf{x}) = \frac{y_2(\mathbf{x}) - y_2^*}{y_{2\max} - y_{2\min}} = \frac{y_2(\mathbf{x}) - 10}{45 - 10}$$

$$\Delta_3(\mathbf{x}) = \frac{y_3(\mathbf{x}) - y_3^*}{y_{3\max} - y_{3\min}} = \frac{y_3(\mathbf{x}) - 1.3}{1.9 - 1.3}$$

$$\Delta_4(\mathbf{x}) = \frac{y_4^* - y_4(\mathbf{x})}{y_{4\max} - y_{4\min}} = \frac{275 - y_4(\mathbf{x})}{275 - 95}$$

Обобщената функция на загубите $F_r^o(\mathbf{x})$, на която трябва да се намери минимума по отношение на управляващите параметри $\mathbf{x}$, има вида:

$$F_r^o(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left(\left| \frac{110 - y_1(\mathbf{x})}{40} \right| + \left| \frac{y_2(\mathbf{x}) - 10}{35} \right| + \left| \frac{y_3(\mathbf{x}) - 1.3}{0.6} \right| + \left| \frac{275 - y_4(\mathbf{x})}{180} \right| \right) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}$$

Пример за вземане на оптимално решение в здравна организация по функция на загуби

В 5 големи болници (А, Б, В, Г, Д) е направено изследване за ефективността на организацията на обслужване в болницата с цел да се препоръча най-добрата структура, най-доброто планиране на дейностите, най-добрата информационна система и оптимална организация на обслужването.

Изследвани са пет показатели на качеството:

y_1 – Средна удовлетвореност на пациентите от здравното обслужване в %;

y_2 – Средна удовлетвореност на медицинския персонал от работата в болницата, включително и от заплащането в %;

y_3 – Брой обслужени пациенти;

y_4 – Брой на смъртните случаи в болницата за определен период от време;

y_5 – Разходи за един пациент в НЕ (неутрална единица).

Таблица 2.2

Болница $\mathbf{x}$	y_1 , % ↑	y_2 , % ↑	y_3 , брой ↑	y_4 , брой ↓	y_5 , NE ↓
А	64.3	63.1	1652	9	500
Б	81.2	50.3	2054	12	550
В	74.1	45.2	2087	18	600
Г	70.0	81.5	2476	10	710
Д	58.3	72.2	2825	16	650

Да се приложи подходът на функцията на загубите (оптимистичен подход) за многокритериална оценка на медицинското обслужване в петте болници, с цел вземане на решение за подобряване на качеството на обслужването.

Таблица 2.3

Показатели на качеството y_j	$y_1, \%$	$y_2, \%$	$y_3, \text{брой}$	$y_4, \text{брой}$	$y_5, \text{НЕ}$
Най-добър резултат y_j^*	81.2	81.5	2825	9	500
Граници на индикаторите					
$y_{j \max}$	81.2	81.5	2825	18	710
$y_{j \min}$	58.3	45.2	1652	9	500

За всяко болнично заведение x (А, Б, В, Г, Д), целевите показатели y_1, y_2, y_3, y_4 и y_5 са трансформирани в загуби $\Delta_j(x)$ от най-добрия резултат на $y_j(x)$ по формулата

$$\Delta_j(x) = \frac{|y_j^* - y_j(x)|}{y_{j \max} - y_{j \min}}, j = 1, 2, \dots, 5,$$

където $y_j(x), (j = 1, 2, \dots, 5)$ е стойността на всеки от петте показателя за всяко болнично заведение x (А, Б, В, Г, Д), а y_j^* е най-добрият резултат за всеки показател $y_j(x)$.

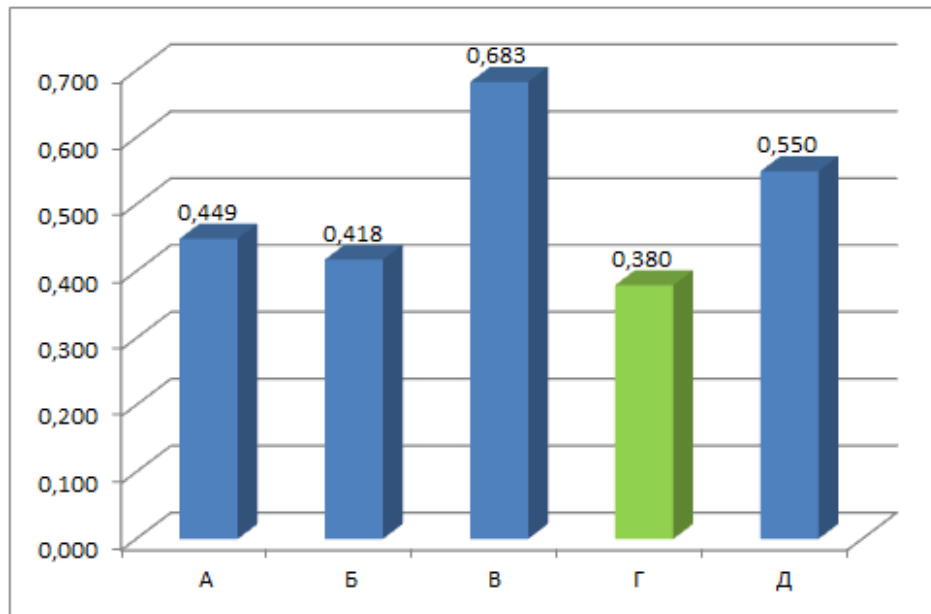
Таблица 2.4

x	$y_1, \%$ ↑	$y_2, \%$ ↑	$y_3, \text{Брой}$ ↑	$y_4, \text{Брой}$ ↓	$y_5, \text{НЕ}$ ↓	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	F_r^o	Р а н г
А	64.3	63.1	1652	9	500	0.738	0.507	1.0	0.0	0.0	0.449	3
Б	81.2	50.3	2054	12	550	0.0	0.860	0.657	0.333	0.238	0.418	2
В	74.1	45.2	2087	18	600	0.310	1.0	0.629	1.0	0.476	0.683	5
Г	70.0	81.5	2476	10	710	0.489	0.0	0.298	0.111	1.0	0.380	1
Д	58.3	72.2	2825	16	650	1.0	0.256	0.0	0.778	0.714	0.550	4

Средно-аритметичната функция на загубите F_r^o се изчислява по формулата

$$F_r^o = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5}{5} \rightarrow \min_x.$$

На фиг.2.3 е показана обобщената функция на загубите F_r^o за всяка от петте разглеждани болници.



фиг.2.3. Обобщена функция на загубите за петте разглеждани болници

След прилагане на оптимистичния подход за решаване на многокритериалната задача, полученият резултат показва, че спрямо зададените критерии на качеството на обслужването, най-близко до изискванията към тях е болница **Г**. За нея обобщената функция на загубите има най-малка стойност.

В таблица 2.4 могат да се видят и ранговете спрямо обобщената функция на загубите за всички пет болници. Най-отдалечена от зададените изисквания за показателите на качеството на обслужването е болница **В**.

2.3. Стратегия на препоръчаното решение. Песимистичен подход

Друг често използван подход за решаване на многокритериални задачи е този с използване на функцията на полезност или т.нар. песимистичен подход. При този подход се изследва полезността или колко ще е полезен резултатът, получен при вземане на дадено решение.

Многоцелева оптимизация по функция на полезност

Този подход се нарича „песимистичен“, тъй като се задават „песимистични“ (най-безполезни) или минимално допустими изисквания за препоръчаните стойности y_j^{pes} на целевите параметри $y_j(x)$ и се максимизират надхвърлянията над тях, наречени „полезност“ ($\eta_j \rightarrow \max$).

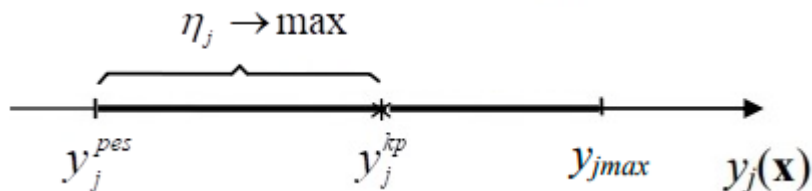
Целевият параметър $y_j(x)$ се трансформира в коефициент на полезност $\eta_j(x)$ по формулата

$$\eta_j(x) = \left| \frac{y_j(x) - y_j^{pes}}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right|, \text{ за } j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.11)$$

където

- y_j^{pes} е най-безполезният резултат (най-лошият резултат) за целевия параметър, зададен по стандарт, вътрешни норми и др., или получен в границите на допустимото за управляващите параметри пространство;

- $y_{j\max}$ и $y_{j\min}$ са границите на полезност, т.е. максималната и минималната стойност за $y_j(x)$.



фиг. 2.4. Максимизиране на полезностите от песимистично зададените препоръчани стойности на целевите параметри y_j^{pes}

Означенията са:

y_j^{pes} - песимистичната (най-лошата) стойност за параметъра $y_j(x)$

$y_{j\max}$ - максималната възможна (зададена) стойност на параметъра $y_j(x)$

y_j^{kp} - компромисната стойност за параметъра $y_j(x)$

η_j - коефициент на полезност спрямо най-лошата стойност на параметъра $y_j(x)$

Избирането на границите на полезност се прави по предварително зададени изисквания или по най-добрия и най-лошия резултат, получени за $y_j(x)$ в областта на изследване.

Обобщената функция на полезност може да бъде пресметната по три начина.

- 1) Средно-аритметична (адитивна) функция на полезност – получава се като средноаритметична стойност от коефициентите на полезност за всички зададени показатели на качеството по формулата:

$$F^p(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \eta_j(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j(x) - y_j^{pes}}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right| \rightarrow \max_x \quad (2.12)$$

- 2) Средно-геометрична (мултипликативна) обобщена функция на полезност – получава се чрез пресмятането на квадратен корен от произведението на коефициентите на полезност за всички зададени показатели на качеството по формулата:

$$F^p(x) = \sqrt[m]{\eta_1(x) \cdot \eta_2(x) \dots \eta_m(x)} \rightarrow \max_x \quad (2.13)$$

- 3) Средно-хармонична обобщена функция на полезност, която се пресмята по следната формула:

$$F^p(x) = \frac{m}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\eta_j(x)}} \rightarrow \max_x \quad (2.14)$$

Компромисното оптимално решение x^* се получава при намиране на максимума на обобщената функция на загубите $F^p(x)$.

И при този подход могат да бъдат отчетени зададени приоритети за всеки от целевите показатели. В този случай обобщената функция на загубите $F_w^p(x)$ има вида:

$$F_w^p(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \eta_j(x) w_j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j(x) - y_j^{pes}}{y_{j\max} - y_{j\min}} \right| W_j \rightarrow \max_x, \quad (2.15)$$

където W_j е тегловният коефициент за j -тия целеви показател на качеството, а компромисното оптимално решение x^* се получава при максималната стойност на функцията $F_w^p(x)$.

Пример

В Таблица 2.5 са зададени четири целеви параметъра (характеристики на качеството) - y_j ($j=1, 2, 3, 4$), с помощта на които ще бъде представен начинът за прилагане на песимистичния подход при решаване на многокритериална задача. За два от целевите параметъра $y_1(x)$ и $y_4(x)$ са желани *максимални стойности*, а за $y_2(x)$ и $y_3(x)$ се търси *минимална стойност*. В Таблицата са дадени изискванията към тези целеви параметри (максимум или минимум), песимистично препоръчаните стойности y_j^{pes} и границите на изменение за всеки от тях ($y_{j\min}, y_{j\max}$).

Таблица 2.5

	Целеви показатели			
	y_1	y_2	y_3	y_4
Изисквания за y_j	max ↑	min ↓	min ↓	max ↑
Песимистична препоръчана стойност y_j^{pes}	70	45	1.9	95
Долна граница $y_{j\min}$	70	10	1.3	95
Горна граница $y_{j\max}$	110	45	1.9	275

Формулите за изчисляване на полезността $\eta_j(x)$ от надхвърляне над песимистично зададените стойности за четирите целеви параметъра са следните:

$$\eta_1(x) = \frac{|y_1(x) - y_1^{pes}|}{|y_{1max} - y_{1min}|} = \frac{|y_1(x) - 70|}{|110 - 70|};$$

$$\eta_2(x) = \frac{|y_2^{pes} - y_2(x)|}{|y_{2max} - y_{2min}|} = \frac{|45 - y_2(x)|}{|45 - 10|};$$

$$\eta_3(x) = \frac{|y_3^{pes} - y_3(x)|}{|y_{3max} - y_{3min}|} = \frac{|1.9 - y_3(x)|}{|1.9 - 1.3|};$$

$$\eta_4(x) = \frac{|y_4(x) - y_4^{pes}|}{|y_{4max} - y_{4min}|} = \frac{|y_4(x) - 95|}{|275 - 95|}.$$

Аддитивната обобщена функция на полезност $F^p(x)$, на която трябва да се намери максимума по отношение на управляващите параметри x , се пресмята по следния начин:

$$F^p(x) = \frac{1}{4} \left(\left| \frac{y_1(x) - 70}{40} \right| + \left| \frac{45 - y_2(x)}{35} \right| + \left| \frac{1.9 - y_3(x)}{0.6} \right| + \left| \frac{y_4(x) - 95}{180} \right| \right) \rightarrow \max_x$$

Пример за вземане на оптимално решение в здравна организация по функция на полезност

Песимистичният подход ще бъде приложен за решаване на задачата, при която в 5 големи болници (А, Б, В, Г, Д) е направено изследване за ефективността на организацията на обслужване в болницата с цел да се препоръча най-добрата структура, най-доброто планиране на дейностите, най-добрата информационна система и оптимална организация на обслужването.

Изследвани са пет показатели на качеството:

y_1 – Средна удовлетвореност на пациентите от здравното обслужване в %;

y_2 – Средна удовлетвореност на медицинския персонал от работата в болницата, включително и от заплащането в %;

y_3 – Брой обслужени пациенти;

y_4 – Брой на смъртните случаи в болницата за определен период от време;

y_5 – Разходи за един пациент в НЕ (неутрална единица).

Таблица 2.6

Болница х	y_1 , % ↑	y_2 , % ↑	y_3 , брой ↑	y_4 , брой ↓	y_5 , NE ↓
А	64.3	63.1	1652	9	500
Б	81.2	50.3	2054	12	550
В	74.1	45.2	2087	18	600
Г	70.0	81.5	2476	10	710
Д	58.3	72.2	2825	16	650

Да се приложи подхода с функцията на полезност (песимистичен подход) за многокритериална оценка на медицинското обслужване в петте болници, с цел вземане на решение за подобряване на качеството на обслужването.

Таблица 2.7

Показатели на качеството y_j	y_1 , %	y_2 , %	y_3 , брой	y_4 , брой	y_5 , НЕ
Най-лош резултат y_j^{pes}	58.3	45.2	1652	18	710
Граници на индикаторите $y_{j\min}$	58.3	45.2	1652	9	500
$y_{j\max}$	81.2	81.5	2825	18	710

За всяко болнично заведение x (А, Б, В, Г, Д), целевите показатели y_1, y_2, y_3, y_4 и y_5 са трансформирани в полезности $\eta_j(x)$ от най-лошия резултат на $y_j(x)$ по формулата

$$\eta_j(x) = \frac{|y_j(x) - y_1^{pes}|}{y_{j\max} - y_{j\min}}, \quad j = 1, 2, \dots, 5,$$

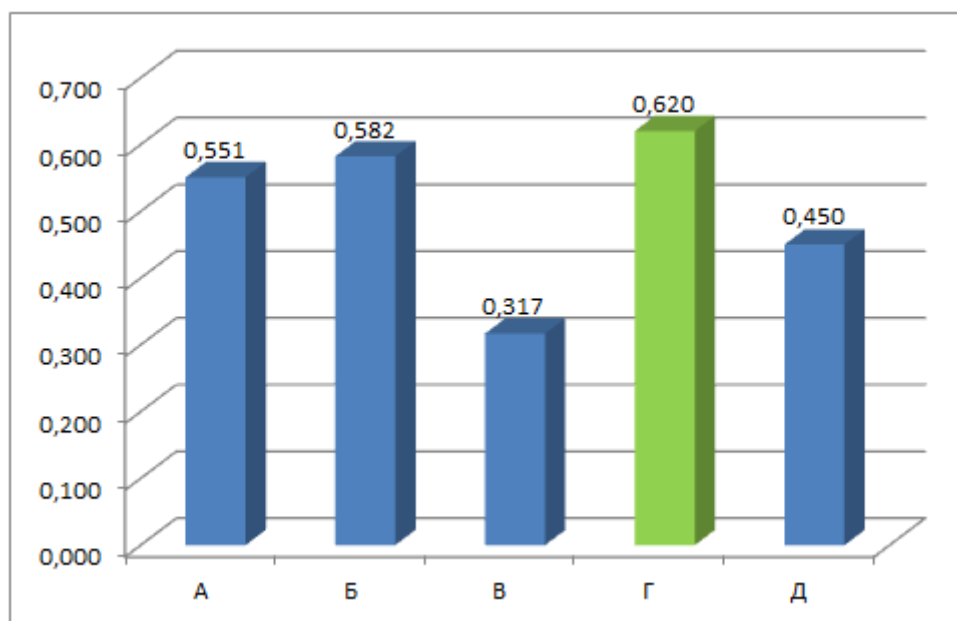
където $y_j(x)$, ($j = 1, 2, \dots, 5$) е стойността на всеки от петте показателя за всяко болнично заведение x (А, Б, В, Г, Д), а y_j^{pes} е най-лошият резултат за всеки показател $y_j(x)$.

Таблица 2.8

x	y_1 , % ↑	y_2 , % ↑	y_3 , Брой ↑	y_4 , Брой ↓	y_5 , HE ↓	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	$F^p(x)$	Ранг
А	64.3	63.1	1652	9	500	0,262	0,493	0,000	1,000	1,000	0,551	3
Б	81.2	50.3	2054	12	550	1,000	0,140	0,343	0,667	0,762	0,582	2
В	74.1	45.2	2087	18	600	0,690	0,000	0,371	0,000	0,524	0,317	5
Г	70.0	81.5	2476	10	710	0,511	1,000	0,702	0,889	0,000	0,620	1
Д	58.3	72.2	2825	16	650	0,000	0,744	1,000	0,222	0,286	0,450	4

Средно-аритметичната функция на полезност F_r^o се изчислява по формулата

$$F^p = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5}{5} \rightarrow \max_x.$$



фиг.2.5. Обобщена функция на полезност за петте разглеждани болници

Получените резултати след прилагане на песимистичния подход за намиране на решение на многокритериалната задача отново показват, че спрямо зададените критерии на качеството на обслужването, най-близко до изискванията към тях е болница **Г**. Обобщената функция на полезност за тази болница има максимална стойност, което означава, че тя се отдалечава максимално от най-лошите стойности на целевите показатели.

В таблица 2.8 за всички пет болници са показани ранговете спрямо обобщената функция на полезност. Спрямо зададените изисквания на показателите на качеството на обслужването отново най-далеч е болница **В**.

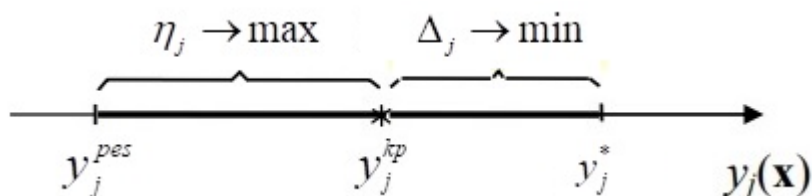
2.4. Стратегия на препоръчаното решение. Рамков подход

Съществува комбиниран подход за оптимално решаване на многоцелеви задачи, който комбинира функцията на загубите и функцията на полезност.

Многоцелева оптимизация с едновременно използване на функцията на загубите и функция на полезност

Подходът, който обединява методите на функцията на загуби и функцията на полезност, (т.е. на оптимистичния и песимистичния подход) се нарича „рамков“.

При рамковия подход се извършва максимизиране на надхвърлянията над песимистично зададената препоръчана стойност y_j^{pes} и минимизиране на загубите от оптимистично зададената препоръчана стойност y_j^* за целевия показател $y_j(x)$, на базата на които се намира компромисното решение y_j^{kp} .



фиг.2.6

Оптималното компромисно решение y_j^{kp} се търси чрез едновременното минимизиране на недостига до най-добрите (желаните, идеалните) стойности y_j^* и максимизиране на надхвърлянията над необходимите (задължителните, нормативните) стойности y_j^{pes} , използвайки формулата:

$$\max_x \{F^{br}(x)\} = \max_x \left\{ \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j(x) - y_j^{pes}}{y_j^* - y_j^{pes}} \right| - \sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j^* - y_j(x)}{y_j^* - y_j^{pes}} \right| \right\} \quad (2.16)$$

Пример

За нагледно представяне на рамковия подход, в Таблица 2.9 са зададени четири целеви параметъра (характеристики на качеството) - y_j ($j=1, 2, 3, 4$), чиито стойности ще бъдат използвани за съставяне на обобщената функция в дадения случай.

За всеки от целевите параметри са определени както оптимистичната (y_j^*), така и песимистичната (y_j^{pes}) им стойност. Определянето на тези стойности е съобразено с изискванията за дадения параметър (за параметри $y_1(\mathbf{x})$ и $y_4(\mathbf{x})$ са желани *максимални стойности*, а за $y_2(\mathbf{x})$ и $y_3(\mathbf{x})$ - *минимални*).

В Таблицата са дадени изискванията към тези целеви параметри (максимум или минимум), песимистично препоръчаните стойности y_j^{pes} и границите на изменение за всеки от тях ($y_{j\min}, y_{j\max}$).

Таблица 2.9

	Целеви показатели			
	y_1	y_2	y_3	y_4
Изисквания за y_j	max ↑	min ↓	min ↓	max ↑
Оптимистична препоръчана стойност y_j^*	110	10	1.3	275
Песимистична препоръчана стойност y_j^{pes}	70	45	1.9	95
Долна граница $y_{j\min}$	70	10	1.3	95
Горна граница $y_{j\max}$	110	45	1.9	275

За да бъде пресметната обобщената функция за рамковия подход, е необходимо да бъдат получени полезностите и загубите за всеки от показателите.

Формулите за всички четири целеви параметъра за изчисляване на полезностите $\eta_j(x)$ от надхвърляне над песимистично зададените стойности, са следните:

$$\eta_1(x) = \left| \frac{y_1(x) - y_1^{pes}}{y_1^* - y_1^{pes}} \right| = \left| \frac{y_1(x) - 70}{110 - 70} \right|;$$

$$\eta_2(x) = \left| \frac{y_2^{pes} - y_2(x)}{y_2^{pes} - y_2^*} \right| = \left| \frac{45 - y_2(x)}{45 - 10} \right|;$$

$$\eta_3(x) = \left| \frac{y_3^{pes} - y_3(x)}{y_3^{pes} - y_3^*} \right| = \left| \frac{1.9 - y_3(x)}{1.9 - 1.3} \right|;$$

$$\eta_4(x) = \left| \frac{y_4(x) - y_4^{pes}}{y_4^* - y_4^{pes}} \right| = \left| \frac{y_4(x) - 95}{275 - 95} \right|.$$

Формулите, по които ще бъдат изчислени загубите Δ_j от оптимистично зададените (най-желаните) стойности за четирите целеви параметъра, са следните:

$$\Delta_1(x) = \frac{y_1^* - y_1(x)}{y_1^* - y_1^{pes}} = \frac{110 - y_1(x)}{110 - 70};$$

$$\Delta_2(x) = \frac{y_2(x) - y_2^*}{y_2^{pes} - y_2^*} = \frac{y_2(x) - 10}{45 - 10};$$

$$\Delta_3(x) = \frac{y_3(x) - y_3^*}{y_3^{pes} - y_3^*} = \frac{y_3(x) - 1.3}{1.9 - 1.3};$$

$$\Delta_4(x) = \frac{y_4^* - y_4(x)}{y_4^* - y_4^{pes}} = \frac{275 - y_4(x)}{275 - 95}.$$

Формулата за обобщената функция $F^{br}(x)$ за разглеждания случай има вида:

$$F^{br}(x) = \left(\left| \frac{y_1(x) - 70}{40} \right| + \left| \frac{45 - y_2(x)}{35} \right| + \left| \frac{1.9 - y_3(x)}{0.6} \right| + \left| \frac{y_4(x) - 95}{180} \right| \right) - \left(\left| \frac{110 - y_1(x)}{40} \right| + \left| \frac{y_2(x) - 10}{35} \right| + \left| \frac{y_3(x) - 1.3}{0.6} \right| + \left| \frac{275 - y_4(x)}{180} \right| \right) \rightarrow \max_x$$

Оптималното решение на многокритериалната задача в случая е за варианта с максимална стойност на обобщената функция $F^{br}(x)$.

Така разглеждания рамков подход ще бъде приложен за задачата, представена в Таблица 2.2. За така зададените стойности трябва да бъдат дефинирани най-добрите и най-лошите стойности за всеки от критериите. Получените резултати са представени в Таблица 2.10.

Таблица 2.10

Показатели на качеството y_j	$y_1, \%$	$y_2, \%$	$y_3, \text{брой}$	$y_4, \text{брой}$	y_5, HE
Най-добър резултат y_j^*	81.2	81.5	2825	9	500
Най-лош резултат y_j^{pes}	58.3	45.2	1652	18	710

За всяко болнично заведение x се пресмятат полезностите $\eta_j(x)$ и загубите $\Delta_j(x)$, а получените резултати са показани в Таблица 2.11.

Таблица 2.11

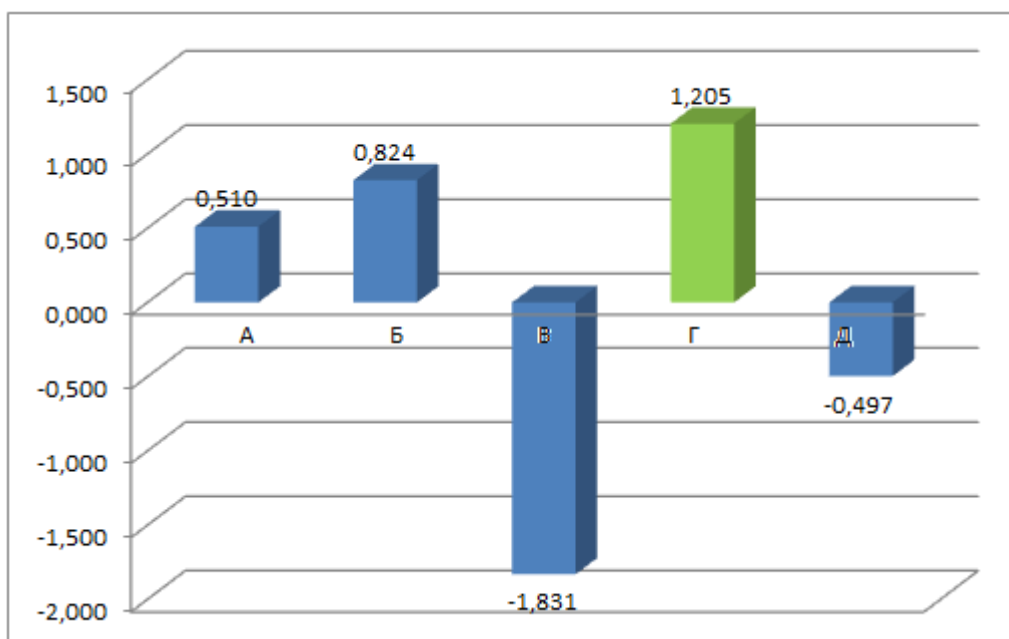
x	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
А	0,262	0,493	0,000	1,000	1,000	0.738	0.507	1.0	0.0	0.0
Б	1,000	0,140	0,343	0,667	0,762	0.0	0.860	0.657	0.333	0.238
В	0,690	0,000	0,371	0,000	0,524	0.310	1.0	0.629	1.0	0.476
Г	0,511	1,000	0,702	0,889	0,000	0.489	0.0	0.298	0.111	1.0
Д	0,000	0,744	1,000	0,222	0,286	1.0	0.256	0.0	0.778	0.714

Използвайки формулата (2.16), са получени стойностите на обобщената целева функция за рамковия подход $F^{br}(x)$ - Таблица 2.12, а на фиг.2.7 те са представени в графичен вид.

Таблица 2.12

x	$F^{br}(x)$	Ранг
A	0,510	3
Б	0,824	2
B	-1,831	5
Г	1,205	1
Д	-0,497	4

За болница **Г** обобщената целева функция $F^{br}(x)$ има максимална стойност, а минималната ѝ стойност е за болница **B**.



фиг.2.7. Обобщена функция за петте разглеждани болници

Прилагането на рамковия подход за изследване ефективността на организацията на обслужване в дадените болнични заведения показва, че болница **Г** е тази, която е най-близо до зададените изисквания за дефинираните показатели на качеството.

Определяне на приоритети и тегловни коефициенти за показателите на качеството

При намиране на оптимално решение на многокритериални задачи има възможност комбинирането на разгледаните стратегии с възможността за отдаване на по-голяма тежест на даден показател, който в конкретния случай има по-голяма значимост за дадения обект, процес и т.н. За да е възможно това, е необходимо да бъдат определени приоритети и тегловни коефициенти за зададените показатели на качеството.

3.1. Оценка на субективни мнения

За определянето на приоритети и тегловни коефициенти за показателите на качеството, се използват мненията на специалисти, експерти или определени заинтересовани по дадения многокритериален проблем (клиенти, потребители и др.).

Определяйки тегловните коефициенти, се използва т.нар. „ранжиране“ или това е определяне на нивото, на което е поставен всеки един от показателите на качеството. Показател с ранг (ниво) 1 е този, който е на първо място по значимост.

Използвайки мненията в случаите за определяне на приоритетни показатели на качеството, трябва да се вземе под внимание субективността на мненията.

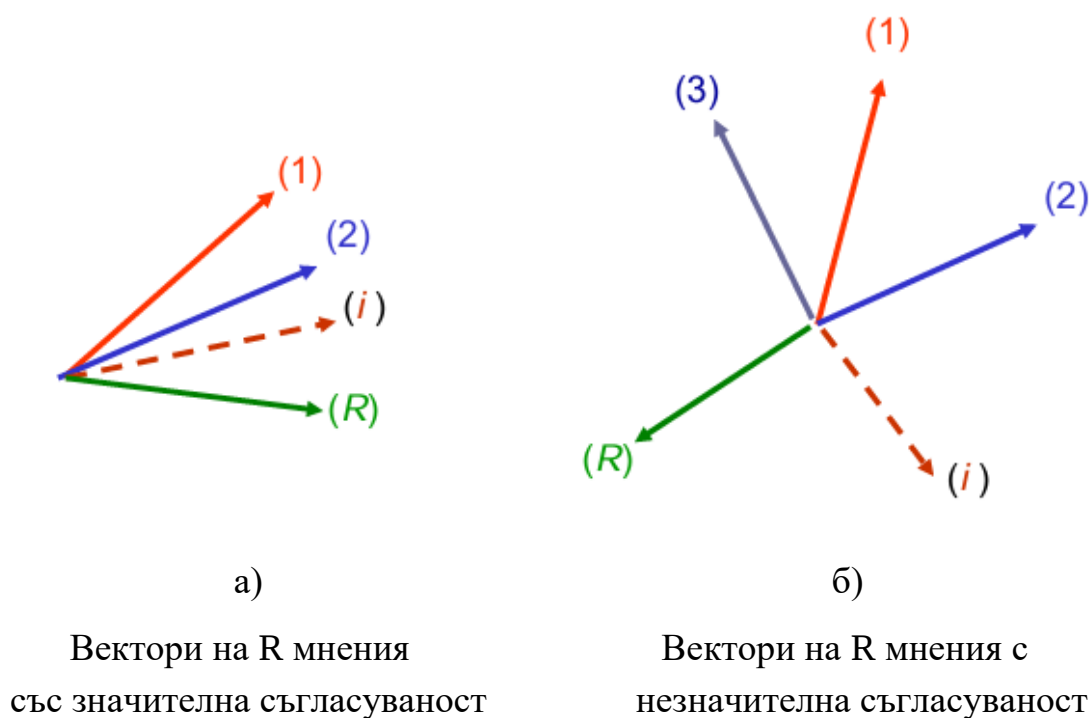
На фиг.3.1 са показани вариантите при оценка на субективни мнения.

Когато има само едно мнение (фиг.3.1а), то е еднозначно. Когато има две мнения по даден въпрос, то те могат да бъдат както с пълна съгласуваност (фиг.3.1б), така и с пълна несъгласуваност (фиг.3.1в).



фиг.3.1

На фиг. 3.2. са представени варианти при повече на брой мнения, които са дадени по съответен въпрос.



фиг.3.2

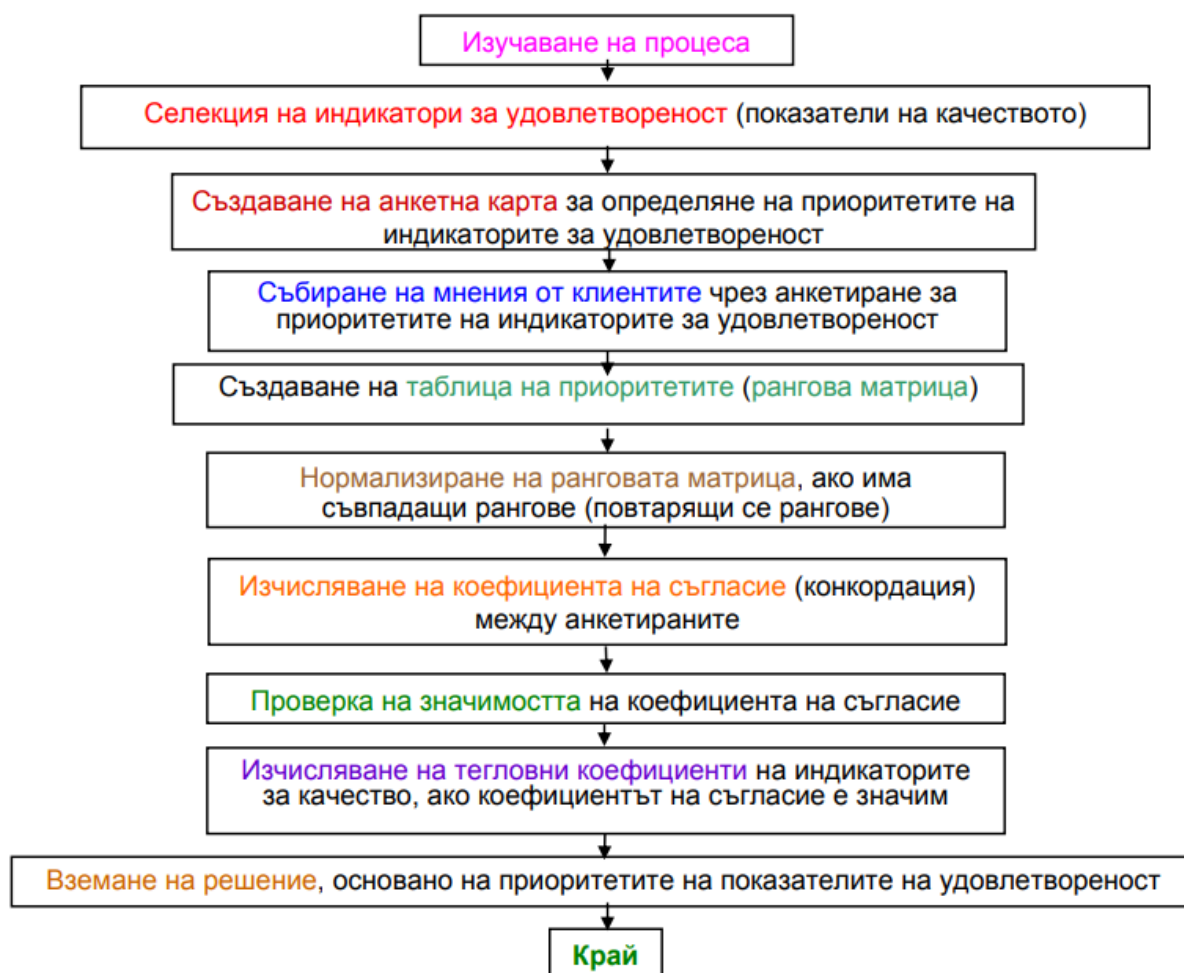
В единият от случаите (фиг.3.2.а) се вижда, че всички мнения са ориентирани в една посока, т.е. има значителна съгласуваност на тези R на брой мнения, докато в другия (фиг.3.2.б) всички разгледани мнения сочат в различни посоки, т.е. те са много разнопосочни. Тук има незначителна съгласуваност на мненията.

Определянето на това дали мненията има значителна или незначителна съгласуваност се прави на базата на теория, използваща коефициент на съгласуваност.

3.2. Определяне на приоритети и тегловни коефициенти чрез ранжиране на индикаторите на качеството

На фиг. 3.3 е показан алгоритъм за определяне на приоритети и тегловни коефициенти чрез ранжиране на индикаторите на качеството.

В началото на процеса, след като е събрана необходимата информация по дадения проблем, който ще бъде решаван, е необходимо да бъдат дефинирани показателите (критериите) на качеството.



фиг.3.3

Създаване на анкетна карта и провеждане на анкетирането

За да бъде определена степента на важност на показателите на качеството, е необходимо да се проведе проучване сред експерти (потребители, клиенти, специалисти и т.н.). За провеждане на такова проучване, е необходимо съставянето на анкетна карта, която те трябва да попълнят. Анкетната карта съдържа списък на показателите на качеството и срещу всеки от тях празни полета, които трябва да бъдат попълнени от анкетираните.

Много е важно показателите на качеството в анкетната карта да нямат номерация, т.к. това подсъзнателно понякога води до поставяне на ранговете по същия начин, както са номерирани показателите.

Таблица 3.1

Характеристики на качеството	Ранг
<i>Характеристика „Е“</i>	2
<i>Характеристика „А“</i>	5
<i>Характеристика „Д“</i>	3
<i>Характеристика „Г“</i>	1
<i>Характеристика „В“</i>	4
<i>Характеристика „Б“</i>	6

Важно е когато се прави анкетирането, участниците в него трябва да бъдат подробно информирани за същността на изследването, целта и причините за него.

В анкетната карта потребителите трябва да определят значимостта или важността на показателите според тяхното виждане. С ранг 1 е показателят, който има най-голяма степен на важност за съответния потребител.

Обобщаване на данните от проучването и създаване на рангова матрица

След като е проведено анкетирането, е необходимо анкетните карти да бъдат събрани и да се обобщят данните, които съдържат, след което те да бъдат обработени. За тази цел мнението на всеки от анкетираните се записва в т.нар. рангова матрица (Таблица 3.2).

Таблица 3.2

<i>Показател →</i> <i>Анкетирани ↓</i>	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2m}
3	a_{31}	a_{32}	...	a_{3j}	...	a_{3m}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{im}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
R	a_{R1}	a_{R2}	...	a_{Rj}	...	a_{Rm}

В ранговата матрица по хоризонтала са показателите на качеството от y_1 до y_m , а по вертикала са анкетираните от 1 до R. Стойностите a_{ij} в таблицата, преставляват нивото на значимост или ранга, който i -тият анкетирани е определил за j -тия показател.

Проверка за наличие на повтарящи се рангове

След като матрицата е попълнена, се прави проверка за наличие на повтарящи се рангове, т.е. дали има показатели, които анкетираните са посочили с еднакво ниво на значимост. Ако такова повторение няма, се пристъпва към изчисляване на коефициента на съгласие между анкетираните.

Изчисляване на коефициента на съгласие между анкетираните при липса на повтарящи се рангове

За получаване на коефициента на съгласие се използва вече създадената рангова матрица, която се допълва с някои необходими пресмятания.

Таблица 3.3

Показател → Анкетиран ↓	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2m}
3	a_{31}	a_{32}	...	a_{3j}	...	a_{3m}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{im}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
R	a_{R1}	a_{R2}	...	a_{Rj}	...	a_{Rm}
$\sum_{i=1}^R a_{ij}$	$\sum_{i=1}^R a_{i1}$	$\sum_{i=1}^R a_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^R a_{ij}$	...	$\sum_{i=1}^R a_{im}$
δ_j	δ_1	δ_2	...	δ_j	...	δ_m
V_j	V_1	V_2	...	V_j	...	V_m
W_j	W_1	W_2	...	W_j	...	W_m
Ранг						

Означенията, включени в таблицата, са:

- $\sum_{i=1}^R a_{ij}$ е сумата от ранговете за всеки от показателите на качеството – от y_1 до y_m ;
- δ_j е отклонението на сумата от ранговете за всеки показател (целеви параметър) от средната сума S_{cp} ;

- V_j - помощна величина за изчисляване на тегловните коефициенти;
- W_j - тегловни коефициенти.

Когато липсва повторение на рангове, последователността за изчисляване на коефициента на съгласие е предложена от Морис Кендал [5] и се свежда до следното:

- ✓ Изчисляване на сумите от ранговете за всеки от показателите на качеството

$$\sum_{i=1}^R a_{ij}, j = 1, 2, \dots, m; \quad (3.1)$$

- ✓ Изчисляване на средната сума от всички рангове S_{cp} по формулата:

$$S_{cp} = \frac{R(m+1)}{2}; \quad (3.2)$$

- ✓ Изчисляване на отклонението δ_j на сумата от ранговете за всеки показател на качеството от получената средна сума S_{cp}

$$\delta_j = \sum_{i=1}^R a_{ij} - S_{cp}; \quad (3.3)$$

- ✓ Изчисляване на коефициента на съгласие w_k по формула, предложена от Морис Кендал

$$w_k = \frac{12 \sum_{j=1}^m \delta_j^2}{R^2(m^3 - m)} \quad (3.4)$$

Изчисляване на коефициента на съгласие между анкетираните при наличие на повтарящи се рангове

В Таблица 3.4. е показана примерна анкетна карта, в която има повтарящи се рангове. В нея анкетираният е поставил показатели „А“ и „Г“ на първо място по значимост, показател „Е“ на второ, показатели „Д“ и „В“ на трето и показател „Б“ на последно, четвърто място.

Таблица 3.4

Характеристики на качеството	Ранг
Характеристика „Е“	2
Характеристика „А“	<u>1</u>
Характеристика „Д“	<u>3</u>
Характеристика „Г“	<u>1</u>
Характеристика „В“	<u>3</u>
Характеристика „Б“	4

Нормализация на ранговата матрица при повтарящи се рангове

В случай, че има повтарящи се рангове, преди да се пристъпи към определяне на тегловните коефициенти, се извършва *нормализация* на ранговата матрица.

Смисълът на нормализацията е да има възможност за сравнение на мненията на анкетираниите, т.е. да се унифицират всички мнения по даден показател така, че да могат да се сравняват. Вариант за унифициране е сумата от ранговете за всички показатели на отделните анкетирани да бъде една и съща.

В Таблица 3.5. са дадени мненията по отношение на 7 критерия за качество на трима анкетирани. Един от тях (номер 3) е задал рангове за показателите от 1 до 7, а другите двама са посочили еднакви нива на значимост за два и повече от показателите. Съответно, сумирайки за всеки от анкетираниите стойностите за отделните рангове, се получават различни стойности.

Таблица 3.5

Показател → Анкетирани ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\sum_{j=1}^7 a_{ij}$
1	2	<u>1</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>4</u>	3	<u>4</u>	19
2	1	<u>2</u>	3	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	5	21
3	2	1	3	5	6	4	7	28

Сумата на ранговете, без повтарящи се стойности, се пресмята по формулата:

$$S_p = \frac{m(m+1)}{2},$$

където:

S_p - сума на ранговете;

m – брой на показателите на качеството.

За разглеждания случай, сумата се получава по формулата:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} = S_p = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{7(7+1)}{2} = 28.$$

За варианта без повтарящи се рангове сумата $\sum_{j=1}^7 a_{ij} = 28$, докато при вариантите с повтарящи се рангове, тя е различна – в единия $\sum_{j=1}^7 a_{ij} = 19$, а в другия $\sum_{j=1}^7 a_{ij} = 21$.

За да се уеднакви сумата, е необходимо да се променят стойностите на ранговете без това да променя нивото на значимост, определено от съответния анкетирани.

Нормализацията се прави по следния начин:

- ✓ Анкетирани №1 е поставил показатели y_2 и y_4 на първо място по ниво на значимост. Това означава, че тези два показателя реално трябва да си поделят първото и второто място в ранговата

таблица. По тази причина техният ранг ще се получи по формулата

$$\frac{1+2}{2}=1.5,$$

при което в таблицата като ниво на значимост за y_2 и y_4 ще се запише стойност 1.5.

Таблица 3.6

Показател → Анкетирани ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\sum_{j=1}^7 a_{ij}$
1	3	<u>1.5</u>	<u>5</u>	<u>1.5</u>	<u>5</u>	4	<u>5</u>	25
2	1	<u>2</u>	3	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	5	21
3	2	1	3	5	6	4	7	28

Необходимо е обаче да бъдат пренаредени и останалите нива на значимост, като следващият по значимост показател ще бъде вече не с ранг 2, а 3, този с ранг 3, ще стане 4 и т.н. до края. (Таблица 3.6)

Същата процедура трябва да бъде приложена и за повтарящите се рангове на показатели y_3 , y_5 и y_7 . Те в момента са с ранг 5, но реално трябва да бъдат на пето, шесто и седмо място. Изчисляването на нормализирания им ранг ще стане по формула:

$$\frac{5+6+7}{3}=6,$$

след което вече сумата $\sum_{j=1}^7 a_{ij} = 28$ (както при неповтарящите се рангове), а нивото на значимост, определено от анкетирани №1, не е променено.

Таблица 3.7

Показател → Анкетиран ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\sum_{j=1}^7 a_{ij}$
1	3	<u>1.5</u>	<u>6</u>	<u>1.5</u>	<u>6</u>	4	<u>6</u>	28
2	1	<u>2</u>	3	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	5	21
3	2	1	3	5	6	4	7	28

- ✓ По същия начин трябва да се нормализират и ранговете, посочени от Анкетиран №2. Той е поставил показатели y_2 и y_4 на второ място. В случая те си поделят втора и трета позиция, т.е. за да бъдат нормализирани се получава

$$\frac{2+3}{2} = 2.5,$$

Таблица 3.8

Показател → Анкетиран ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\sum_{j=1}^7 a_{ij}$
1	3	<u>1.5</u>	<u>6</u>	<u>1.5</u>	<u>6</u>	4	<u>6</u>	28
2	1	<u>2.5</u>	4	<u>2.5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>	6	26
3	2	1	3	5	6	4	7	28

Отново пренареждаме останалите рангове – рангът за показател y_3 от 3 става 4, за y_5 и y_6 стават 5, а за y_7 рангът става 6.

Нормализират се ранговете на показатели y_5 и y_6

$$\frac{5+6}{2} = 5.5,$$

променя се ранга на показател y_7 и се получава окончателният вид на нормализираната рангова матрица – Таблица 3.9.

Таблица 3.9

Показател → Анкетирани ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\sum_{j=1}^7 a_{ij}$
1	3	<u>1.5</u>	<u>6</u>	<u>1.5</u>	<u>6</u>	4	<u>6</u>	28
2	1	<u>2.5</u>	4	<u>2.5</u>	<u>5.5</u>	<u>5.5</u>	7	28
3	2	1	3	5	6	4	7	28

След извършената нормализация на ранговете, получените суми на всеки ред вече са еднакви, $\sum_{j=1}^7 a_{ij} = 28$.

Изчисляване на коефициента на съгласие между анкетираните

- ✓ Изчислява се коригиращата величина T_i - след като ранговата матрица е нормализирана и са определени броя на повтарящите се рангове t_i , се изчислява коригиращата величина T_i по формулата

$$T_i = \frac{1}{12} \sum_{t_i} (t_i^3 - t_i) \quad (3.5)$$

Особеното в случая с повтарящи се рангове е това, че има размиване на ранжирането. Въпреки че сумите от ранговете са еднакви, е необходимо въвеждането на един коригиращ коефициент, с който да се отчете факта, че има повтарящи се рангове. За тази цел първо се отразява колко повторения има при всеки от анкетираните. Това е коефициента t_i в Таблица 3.10. Стойността му при анкетирани №1 е „2+3“. Това означава, че има две повторения на рангове. В единия случай повторението е два пъти (еднакъв ранг за показатели y_2 и y_4), а в другия повторението е три пъти (еднакъв ранг за показатели y_3 , y_5 и y_7).

$$T_1 = \frac{2^3 - 2 + 3^3 - 3}{12} = \frac{30}{12} = 2.5$$

При анкетирани №2 стойността на коефициента е $t_i = 2 + 2$. Значението в този случай е – наличие на двукратно повторение на два ранга (един път за показатели y_2 и y_4 и втори път за показатели y_5 и y_6).

$$T_2 = \frac{2^3 - 2 + 2^3 - 2}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Таблица 3.10

Показател→ Анкетирани ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\sum_{j=1}^7 a_{ij}$	Брой повтарящи се рангове t_i	T_i
1	3	<u>1.5</u>	<u>6</u>	<u>1.5</u>	<u>6</u>	4	<u>6</u>	28	<u>2</u> + <u>3</u>	2.5
2	1	<u>2.5</u>	4	<u>2.5</u>	<u>5.5</u>	<u>5.5</u>	7	28	<u>2</u> + <u>2</u>	1.0
3	2	1	3	5	6	4	7	28	0	0

Коригиращата величина се изчислява по този начин за всеки анкетирани, задал повтарящи нива на значимост за отделни показатели, след което се продължава в следната последователност:

- ✓ Изчисляват се сумите от ранговете за всеки от показателите на качеството

$$\sum_{i=1}^R a_{ij}, j = 1, 2, \dots, m; \quad (3.6)$$

- ✓ Изчислява се средната сума от всички рангове S_{cp} по формулата:

$$S_{cp} = \frac{R(m+1)}{2}; \quad (3.7)$$

- ✓ Изчислява се отклонението δ_j на сумата от ранговете за всеки показател на качеството от получената средна сума S_{cp}

$$\delta_j = \sum_{i=1}^R a_{ij} - S_{cp}; \quad (3.8)$$

- ✓ Изчисляване на коефициента на съгласие w_k по формулата

$$w_k = \frac{12 \sum_{j=1}^m \delta_j^2}{R^2(m^3 - m) - 12R \sum_i T_i} \quad (3.9)$$

Таблица 3.11

Показател → Анкетирани ↓	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	$\sum_{j=1}^m a_{ij}$	Брой повтарящи се рангове t_i	T_i
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1m}	$\sum_{j=1}^m a_{1j}$		
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2m}	$\sum_{j=1}^m a_{2j}$		
3	a_{31}	a_{32}	...	a_{3j}	...	a_{3m}	$\sum_{j=1}^m a_{3j}$		
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{im}	$\sum_{j=1}^m a_{ij}$		
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
R	a_{R1}	a_{R2}	...	a_{Rj}	...	a_{Rm}	$\sum_{j=1}^m a_{Rj}$		
$\sum_{i=1}^R a_{ij}$	$\sum_{i=1}^R a_{i1}$	$\sum_{i=1}^R a_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^R a_{ij}$	...	$\sum_{i=1}^R a_{im}$			
δ_j	δ_1	δ_2	...	δ_j	...	δ_m			

Проверка за значимостта на мненията на потребителите

Чрез коефициента на съгласие w_k се прави проверка за значимостта на мненията на потребителите. Коефициентът на съгласие (конкордация) w_k може да се изменя от 0 при пълна несъгласуваност в мненията до +1 при пълна съгласуваност.

Оценка на значимостта на изчисления коефициент w_k може да стане по два критерия в зависимост от броя на показателите на качеството –

✓ χ^2 –критерий при брой на целевите параметри $m \geq 7$

При брой на ранжираните показатели m равен или по-голям от седем, се изчислява коефициентът χ^2

$$\chi^2_{изч} = R(m-1)w_k \quad (3.10)$$

Коефициентът на съгласуваност w_k е значим, ако

$$\chi^2_{изч} > \chi^2_{табл}(\alpha, \nu) \quad (3.11)$$

Стойността на коефициента $\chi^2_{табл}$ се взима от таблица при степени на свобода $\nu = m - 1$ и ниво на значимост α , с на доверителна вероятност $\beta = 1 - \alpha$. (Таблица 3.12)

Най-използваното ниво на значимост е $\alpha = 0.05$, т.е. доверителната вероятност е 95%.

Таблица 3.12. Таблични стойности на χ^2 критерия (Критерий на Пирсън)

Стойности на χ^2 при брой на степени на свобода ν и ниво на значимост α *				
ν	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	1.642	2.706	3.841	6.635
2	3.219	4.605	5.991	9.210
3	4.642	6.251	7.815	11.345
4	5.989	7.779	9.488	13.277
5	7.289	9.236	11.070	15.086
6	8.558	10.645	12.592	16.812
7	9.803	12.017	14.067	18.475
8	11.030	13.362	15.507	20.090
9	12.242	14.684	16.919	21.666
10	13.442	15.987	18.307	23.209
11	14.631	17.275	19.675	24.725
12	15.821	18.549	21.026	26.217
13	16.983	19.812	22.362	27.688
14	18.151	21.064	23.685	29.141
15	19.311	22.307	24.996	30.578
16	20.465	23.542	26.296	32.000
17	21.615	24.769	27.587	33.409
18	22.760	25.989	28.869	34.805
19	23.900	27.204	30.144	36.191
20	25.038	28.412	31.410	37.566
21	26.171	29.615	32.671	38.932
22	27.301	30.813	33.924	40.289
23	28.429	32.007	35.172	41.638
24	29.553	33.196	36.415	42.980
25	30.675	34.382	37.652	44.314
26	31.795	35.563	38.885	45.642
27	32.912	36.741	40.113	46.963
28	34.027	37.916	41.337	48.278
29	35.139	39.087	42.557	49.588
30	36.250	40.256	43.773	50.892

* Таблицата е заимствана от книгата на R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd, Edinburgh, Р. Фишер, Статистически методи за изследователи, руски превод, Госстатиздат, М. 1958.

✓ Z - критерия на Фишер при $m < 7$.

При брой на ранжираните показатели m по-малък от седем, се изчислява величината Z :

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{(R-1)w_k}{1-w_k} \quad (3.12)$$

Ако е изпълнено условието $Z > Z_{табл}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$, коефициентът на съгласие w_k е значим. $Z_{табл}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ се взема от таблица (Таблица 3.13) при степени на свобода

- $\nu_1 = m - 1 - \frac{2}{R}$, закръглено до цяло число
- $\nu_2 = (R-1)\nu_1$, закръглено до цяло число
- α е ниво на значимост, което отговаря на доверителна вероятност $\beta = 1 - \alpha$.

Ако коефициентът на съгласуваност w_k е незначим, то той се приема за равен на 0. Това означава, че не могат да бъдат определени приоритети на отделните показатели на качеството и те се приемат за еднакво важни, т.е. $W_j = 1, j = 1, 2, \dots, m$.

Таблица 3.13

Разпределение Z при ниво на значимост $\alpha = 0.05$ *										
Стойности на ν_2	Стойности на ν_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	2,54	2,65	2,69	2,71	2,72	2,73	2,74	2,75	2,76	2,77
2	1,46	1,47	1,48	1,48	1,48	1,48	1,48	1,48	1,48	1,48
3	1,16	1,13	1,11	1,10	1,10	1,10	1,09	1,08	1,08	1,07
4	1,02	0,97	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88	0,86
5	0,94	0,88	0,84	0,82	0,81	0,80	0,79	0,77	0,75	0,74
6	0,89	0,82	0,78	0,76	0,74	0,73	0,71	0,69	0,67	0,65
7	0,86	0,78	0,73	0,71	0,69	0,68	0,66	0,64	0,61	0,59
8	0,84	0,75	0,70	0,67	0,65	0,64	0,62	0,59	0,57	0,54
9	0,82	0,72	0,68	0,64	0,62	0,61	0,59	0,56	0,53	0,50
10	0,80	0,71	0,66	0,62	0,60	0,58	0,56	0,53	0,50	0,47
11	0,79	0,69	0,64	0,60	0,58	0,56	0,54	0,51	0,48	0,44
12	0,78	0,68	0,62	0,59	0,57	0,55	0,52	0,50	0,46	0,42
13	0,77	0,67	0,61	0,58	0,55	0,54	0,51	0,48	0,44	0,40
14	0,76	0,66	0,60	0,57	0,54	0,52	0,50	0,46	0,43	0,38
15	0,76	0,65	0,60	0,56	0,53	0,51	0,48	0,45	0,41	0,36
16	0,75	0,64	0,59	0,55	0,52	0,50	0,48	0,44	0,40	0,35
17	0,75	0,64	0,58	0,54	0,52	0,50	0,47	0,43	0,39	0,34
18	0,74	0,63	0,58	0,54	0,51	0,49	0,46	0,42	0,38	0,32
19	0,74	0,63	0,57	0,53	0,50	0,48	0,45	0,42	0,37	0,32
20	0,74	0,62	0,56	0,53	0,50	0,48	0,45	0,41	0,37	0,30
21	0,73	0,62	0,56	0,52	0,49	0,47	0,44	0,40	0,36	0,30
22	0,73	0,62	0,56	0,52	0,49	0,47	0,44	0,40	0,35	0,29
23	0,73	0,62	0,55	0,51	0,48	0,46	0,43	0,40	0,35	0,28
24	0,72	0,61	0,55	0,51	0,48	0,46	0,43	0,39	0,34	0,27
25	0,72	0,61	0,55	0,51	0,48	0,46	0,42	0,39	0,34	0,27
26	0,72	0,61	0,54	0,50	0,48	0,45	0,42	0,38	0,33	0,26
27	0,72	0,60	0,54	0,50	0,47	0,45	0,42	0,38	0,33	0,26
28	0,72	0,60	0,54	0,50	0,47	0,45	0,41	0,38	0,32	0,25
29	0,72	0,60	0,54	0,50	0,47	0,44	0,41	0,37	0,32	0,25
30	0,71	0,60	0,53	0,49	0,46	0,44	0,41	0,37	0,32	0,24
60	0,69	0,57	0,51	0,46	0,43	0,41	0,37	0,32	0,26	0,16
∞	0,67	0,55	0,48	0,43	0,40	0,37	0,33	0,28	0,21	0

- * Заимствано от книгата на R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd, Edinburgh, Р. Фишер, Статистические методы для исследователей, руски превод, Госстатиздат, М. 1958.

При условие, че коефициентът на съгласуваност W_k е значим, т.е. има съгласуваност в субективните мнения на анкетираните потребители (или специалистите), то тогава могат да се изчислят тегловните коефициенти.

$$W_j = \frac{V_j}{\sum_{j=1}^m V_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.13)$$

където

$$V_j = \frac{Rm - \sum_{i=1}^R a_{ij}}{Rm - R} \quad (3.14)$$

За така получените тегловни коефициенти се изпълнява условието:

$$\sum_{j=1}^m W_j = 1. \quad (3.15)$$

Таблица 3.14

Показател → Анкетиран ↓	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	$\sum_{j=1}^m a_{ij}$	Брой повтарящи се рангове t_i	T_i
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1m}	$\sum_{j=1}^m a_{1j}$		
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2m}	$\sum_{j=1}^m a_{2j}$		
3	a_{31}	a_{32}	...	a_{3j}	...	a_{3m}	$\sum_{j=1}^m a_{3j}$		
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{im}	$\sum_{j=1}^m a_{ij}$		
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
R	a_{R1}	a_{R2}	...	a_{Rj}	...	a_{Rm}	$\sum_{j=1}^m a_{Rj}$		
$\sum_{i=1}^R a_{ij}$	$\sum_{i=1}^R a_{i1}$	$\sum_{i=1}^R a_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^R a_{ij}$	...	$\sum_{i=1}^R a_{im}$			
δ_j	δ_1	δ_2	...	δ_j	...	δ_m			
V_j	V_1	V_2	...	V_j	...	V_m			
W_j	W_1	W_2	...	W_j	...	W_m			
Ранг									

Пример за определяне на приоритети и пресмятане на тегловни коефициенти

Пример за определяне на приоритети и пресмятане на тегловни коефициенти без повтарящи се рангове

Проведено е прочване като са анкетирани експерти във връзка с успешно и ефективно здравно обслужване. Анкетираните са 9, а показателите, които трябва да подредат по ниво на значимост, са 7 (Таблица 3.15).

Таблица 3.15

Целеви показател	Ранг
<i>Ръководство на здравната организация</i>	
<i>Медицински персонал</i>	
<i>Жизнен стандарт</i>	
<i>Методи за лечение</i>	
<i>Структура и стратегия на здравната организация</i>	
<i>Ресурси за медицинско обслужване</i>	
<i>Партньорство с други медицински организации</i>	

След провеждане на проучването, данните са събрани и обобщени в ранговата матрица, показана в Таблица 3.16

Таблица 3.16

Показател → Анкетирани ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
1	1	2	4	3	7	5	6
2	3	5	6	1	4	2	7
3	6	2	7	1	5	3	4
4	3	1	6	5	4	2	7
5	2	3	7	1	6	4	5
6	3	1	7	2	6	4	5
7	1	3	6	2	4	5	7
8	1	2	7	3	5	4	6
9	2	4	7	1	3	5	6

Т.к. няма повторение на ранговете, се пристъпва към пресмятане на коефициента на съгласие, за да се провери съгласуваността на представените мнения.

Първата стъпка е да бъдат пресметнати сумите от ранговете за всеки от целевите показатели - $\sum_{i=1}^9 a_{ij}$.

Таблица 3.17

Показател → Анкетирани ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
1	1	2	4	3	7	5	6
2	3	5	6	1	4	2	7
3	6	2	7	1	5	3	4
4	3	1	6	5	4	2	7
5	2	3	7	1	6	4	5
6	3	1	7	2	6	4	5
7	1	3	6	2	4	5	7
8	1	2	7	3	5	4	6
9	2	4	7	1	3	5	6
$\sum_{i=1}^9 a_{ij}$	22	23	57	19	44	34	53
δ_j	-14	-13	21	-17	8	-2	17
V_j	0,759	0,741	0,111	0,815	0,352	0,537	0,185
W_j	0,217	0,212	0,032	0,233	0,101	0,153	0,053
Ранг	2	3	7	1	5	4	6

Следващата стъпка е определяне на средната сума S_{cp} :

$$S_{cp} = \frac{R(m+1)}{2} = \frac{9(7+1)}{2} = 36,$$

отклонението δ_j на сумата от ранговете, $\sum_{i=1}^9 a_{ij}$, от тази средна сума, както

и $\sum_{j=1}^7 \delta_j^2 = 1452.$

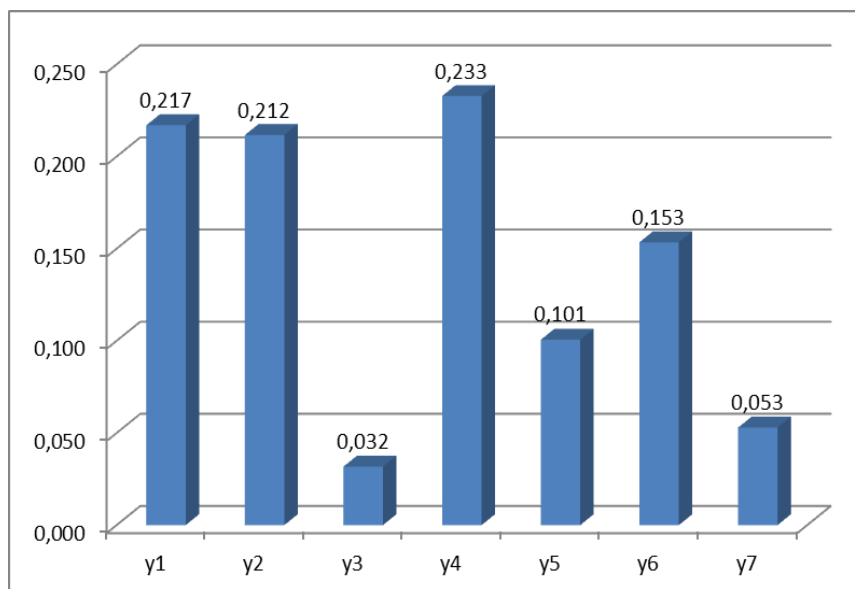
След това се изчислява коефициента на съгласие w_k по формулата

$$w_k = \frac{12 \sum_{j=1}^m \delta_j^2}{R^2(m^3 - m)} = \frac{12 * 1452}{9^2(7^3 - 7)} = 0.64.$$

Т.к. показателите на качеството са 7, проверката за съгласуваност на мненията трябва да се извърши по χ^2 критерия.

$$\chi_{изч}^2 = R(m-1)w_k = 9(7-1)0.64 = 34.56$$

Стойността на коефициента $\chi_{табл}^2$ се взима от таблица (Таблица 3.12) като се има предвид степените на свобода $\nu = m - 1 = 6$ и ниво на значимост $\alpha = 0.01$, т.е. доверителна вероятност $\beta = 1 - \alpha = 0.99$ и е $\chi_{табл}^2 = 16.812$, т.е. $\chi_{изч}^2 = 34.56 > 16.812$. Това означава, че има съгласуваност на мненията на експертите с вероятност не по-малка от 99% и могат да бъдат пресметнати тегловни коефициенти за всеки от показателите на качеството (3.15). В Таблица 3.17 са показани получените стойности W_j , а на фиг.3.4 същите са представени графично.



фиг.3.4

Според анализиранията мнения, анкетираните експерти са поставили на първо място по значимост показател y_4 , който отчита методите за лечение в здравното заведение. На второ място е поставен показател y_1 , свързан с ръководството на здравното заведение, а на трето - y_2 , определящ степента на професионална компетентност на медицинския персонал.

Пример за определяне на приоритети и пресмятане на тегловни коефициенти при наличие на повтарящи се рангове

Във връзка с проучване на качеството на здравното обслужване, са анкетирани пациенти на здравно заведение. В изследването са включени следните показатели (Таблица 3.18):

y_1 – Време на чакане за здравната услуга;

y_2 – Професионална компетентност на медицинския персонал;

y_3 – Хигиена в здравното заведение;

y_4 – Разходи на пациента за здравната услуга;

y_5 – Отношение на медицинския персонал към пациента.

Таблица 3.18

Целеви показател	Ранг
<i>Време на чакане за здравната услуга</i>	
<i>Професионална компетентност на медицинския персонал</i>	
<i>Хигиена в здравното заведение</i>	
<i>Разходи на пациента за здравната услуга</i>	
<i>Отношение на медицинския персонал към пациента</i>	

Получено е мнението на 9 пациента, които са подредили посочените 5 показатели на качеството по значимост, а в таблица 3.19 са показани обобщените данни от анкетите.

Таблица 3.19

Показател → Пациент ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	4	1	5	3	2
2	3	<u>1</u>	4	2	<u>1</u>
3	<u>3</u>	2	4	1	<u>3</u>
4	<u>2</u>	<u>1</u>	3	<u>2</u>	<u>1</u>
5	4	2	5	3	1
6	<u>4</u>	1	<u>4</u>	2	3
7	5	1	4	3	2
8	2	1	5	4	3
9	3	1	5	4	2

Нормализация на ранговата матрица

Поради наличие на повтарящи се рангове за някои от анкетираните пациенти, е необходимо преди изчисляване на коефициента на съгласие да бъде извършена нормализация на ранговата матрица (Таблица 3.20).

Таблица 3.20

Показател → Пациент ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\sum_{j=1}^7 a_{ij}$	Брой повтарящи се рангове t_i	T_i
1	4	1	5	3	2	15	0	0
2	4	<u>1.5</u>	5	3	<u>1.5</u>	15	<u>2</u>	0.5
3	<u>3.5</u>	2	5	1	<u>3.5</u>	15	<u>2</u>	0.5
4	<u>3.5</u>	<u>1.5</u>	5	<u>3.5</u>	<u>1.5</u>	15	<u>2+2</u>	1
5	4	2	5	3	1	15	0	0
6	<u>4.5</u>	1	<u>4.5</u>	2	3	15	2	0.5
7	5	1	4	3	2	15	0	0
8	2	1	5	4	3	15	0	0
9	3	1	5	4	2	15	0	0

Изчисляване на коефициента на съгласие и проверка за значимостта на мненията на потребителите

Средната сума в случая е

$$S_{cp} = \frac{R(m+1)}{2} = \frac{9(5+1)}{2} = 27,$$

а сумата от квадратите на отклоненията δ_j на сумата от ранговете от тази средна сума, е $\sum_{j=1}^5 \delta_j^2 = 596$. (Таблица 3.21)

Изчислява се коефициента на съгласие w_k по формулата

$$w_k = \frac{12 \sum_{j=1}^5 \delta_j^2}{R^2(m^3 - m) - 12R \sum_i T_i} = \frac{12 * 596}{9^2(5^3 - 5) - 12 * 9 * 2.5} = 0.757.$$

За да се направи проверка за значимостта на мненията на потребителите, при целеви показатели $m < 7$, се използва Z - критерия на Фишер. За целта се пресмята Z по формулата:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{(R-1)w_k}{1-w_k} = \frac{1}{2} \ln \frac{(9-1)0.757}{1-0.757} = 1.608$$

Степените на свобода при Z - критерия на Фишер са

- $\nu_1 = m - 1 - \frac{2}{R} = 5 - 1 - \frac{2}{9} = 3.778$, като получената стойност се закръгля до цяло число, т.е. $\nu_1 = 4$
- $\nu_2 = (R-1)\nu_1 = (9-1)3.778 = 30.224$, а закръглената стойност е $\nu_2 = 30$

При ниво на значимост $\alpha = 0.05$ и получените стойности за степените на свобода $\nu_1 = 4$ и $\nu_2 = 30$, табличната стойност на Z е

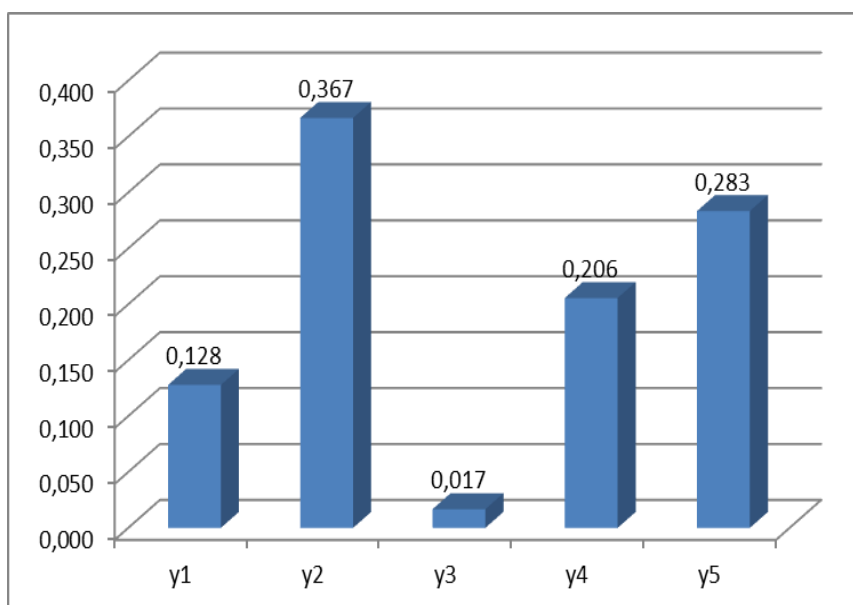
$$Z_{табл}(\alpha = 0.05, \nu_1 = 4, \nu_2 = 30) = 0.49.$$

Т.к. условието $Z > Z_{табл}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ е изпълнено, то коефициентът на съгласие w_k е значим, има съгласуваност в мненията на анкетираните пациенти (с доверителна вероятност не по-малка от 95%) и могат да бъдат определени тегловни коефициенти за всеки от показателите на качеството.

Таблица 3.21

Показател → Пациент ↓	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\sum_{j=1}^5 a_{ij}$	Брой повтарящи се рангове t_i	T_i
1	4	1	5	3	2	15	0	0
2	4	<u>1.5</u>	5	3	<u>1.5</u>	15	<u>2</u>	0.5
3	<u>3.5</u>	2	5	1	<u>3.5</u>	15	<u>2</u>	0.5
4	<u>3.5</u>	<u>1.5</u>	5	<u>3.5</u>	<u>1.5</u>	15	<u>2+2</u>	1
5	4	2	5	3	1	15	0	0
6	<u>4.5</u>	1	<u>4.5</u>	2	3	15	2	0.5
7	5	1	4	3	2	15	0	0
8	2	1	5	4	3	15	0	0
9	3	1	5	4	2	15	0	0
$\sum_{i=1}^9 a_{ij}$	33.5	12	43.5	26.5	19.5			
δ_j	6.5	-15	16.5	-0.5	-7.5			
V_j	0.31 9	0.91 7	0.042	0.514	0.708			
W_j	0.12 8	0.36 7	0.017	0.206	0.283			
Ранг	4	1	5	3	2			

В Таблица 3.21 са представени получените числени стойности за тегловните коефициенти W_j , а на фиг. 3.5 те са показани графично.



фиг.3.5

Според мнението на анкетираните пациенти, на първо място по значимост е показател y_2 или професионалната компетентност на медицинския персонал. Втори по значимост показател, според дадените от пациентите мнения, е показател y_5 (отношение на медицинския персонал към пациента), а на трето място са разходите на пациента за здравната услуга или това е показател y_4 .

3.3. Оценяване на удовлетвореността на клиентите от показателите на качеството

За да бъде оценено нивото на удовлетвореност на клиентите от показателите на качеството с отчитане на приоритетите им, е необходимо да се попълни анкетна карта. В нея се включват всички целеви показатели, а клиентите трябва да дадат оценка за нивото си на удовлетвореност за всеки от показателите по скалата от 1 до 100. Със стойност 100 е нивото на максимална удовлетвореност.

Таблица 3.22

Показател → Клиент ↓	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	Z_{wc_i}
1	k_{11}	k_{12}	...	k_{1j}	...	k_{1m}	Z_{wc_1}
2	k_{21}	k_{22}	...	k_{2j}	...	k_{2m}	Z_{wc_2}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
i	k_{i1}	k_{i2}	...	k_{ij}	...	k_{im}	Z_{wc_i}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
R	k_{R1}	k_{R2}	...	k_{Rj}	...	k_{Rm}	Z_{wc_R}
Средна удовлетвореност от всеки показател, Z_{y_j}	Z_{y_1}	Z_{y_2}	...	Z_{y_j}	...	Z_{y_m}	
Тегловни коэффициенти на показателите, W_j	W_1	W_2	...	W_j	...	W_m	
Удовлетвореност с отчитане на тегловния коэффициент, Z_{wy_j}	Z_{wy_1}	Z_{wy_2}	...	Z_{wy_j}	...	Z_{wy_m}	

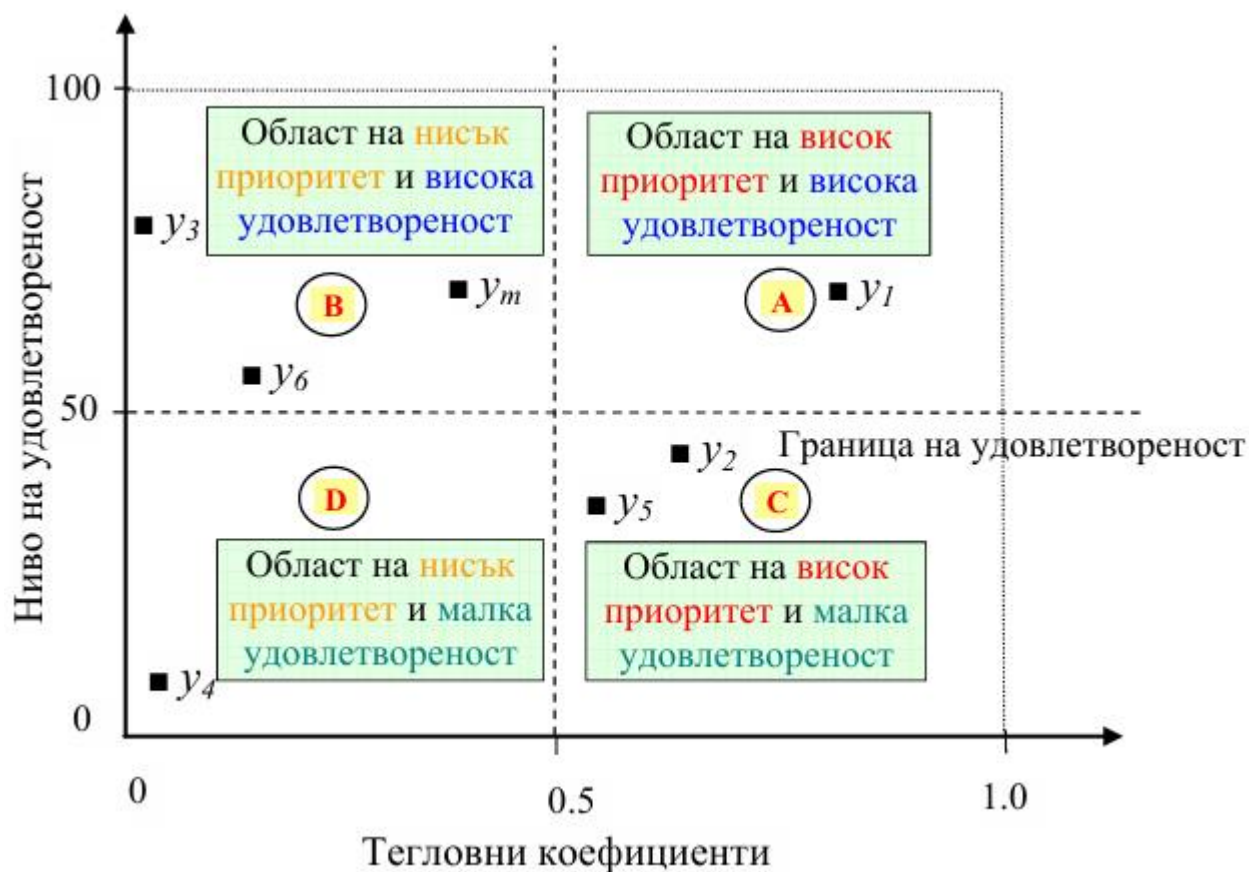
За определяне на удовлетвореността на всички клиенти от всяка характеристика, с отчитане на приоритета на характеристиката, се изчислява средната стойност на дадените от всички клиенти стойности за нивото на удовлетвореност от тази характеристика, мащабирана с тегловния коэффициент на характеристиката.

$$Z_{wy_j} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R k_{ij} W_j, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.16)$$

За да се определи общата удовлетвореност на всички клиенти от всички показатели на качеството с отчитане на приоритетите им, се използва формулата:

$$Z_{wy} = \frac{\sum_{j=1}^m Z_{wy_j}}{R}. \quad (3.17)$$

На фиг.3.6 е представена в графичен вид удовлетвореността на клиентите от показателите на качеството в съответствие с приоритетите на тези показатели.



фиг.3.6

Пример за оценки на степента на удовлетвореност на клиентите с отчитане на тегловните коефициенти на показателите

Извършено е проучване сред експерти с цел определяне на приоритети и пресмятане на тегловни коефициенти на следните четири показателя на качеството на здравното обслужване :

- Своевременност на поставяне на диагнозата, y_1 ;
- Предписание на най-подходящите медикаменти, y_2 ;

- Налична апаратура за лечението, y_3 ;
- Компетентност на медицинския персонал, y_4 .

Получените резултати са обобщени в Таблица 3.23. Пресметнати са средната удовлетвореност на експертите от всеки показател, както и удовлетвореността с отчитане на тегловния коефициент.

Таблица 3.23

Показател на качеството, y_j	y_1	y_2	y_3	y_4
Средна удовлетвореност от всеки показател, Z_{y_j}	$Z_{y_1} = 38$	$Z_{y_2} = 73$	$Z_{y_3} = 81$	$Z_{y_4} = 55$
Тегловни коефициенти на показателите, W_j	$W_1 = 0.412$	$W_2 = 0.190$	$W_3 = 0.077$	$W_4 = 0.311$
Удовлетвореност с отчитане на тегловния коефициент, Z_{wy_j}	$Z_{wy_1} = 15.656$	$Z_{wy_2} = 13.870$	$Z_{wy_3} = 6.237$	$Z_{wy_4} = 17.105$

Освен числените стойности за средната удовлетвореност на експертите от всеки показател, тегловните коефициенти и удовлетвореността с отчитане на съответния тегловен коефициент, същите са представени и в графичен вид на фиг.3.7, фиг.3.8 и фиг.3.9.

На фиг.3.7 се вижда, че без отчитане на тегловните коефициенти, най-висока е средната удовлетвореност от показател y_3 , който е свързан с отчитане на налична апаратура за осъществяване на лечението.



фиг.3.7

Отчитайки мненията на анкетираниите, най-висок приоритет е посочен за показател y_1 или своевременно на поставяне на диагнозата, а на второ място е компетентността на медицинския персонал или показател y_4 . (фиг.3.8).



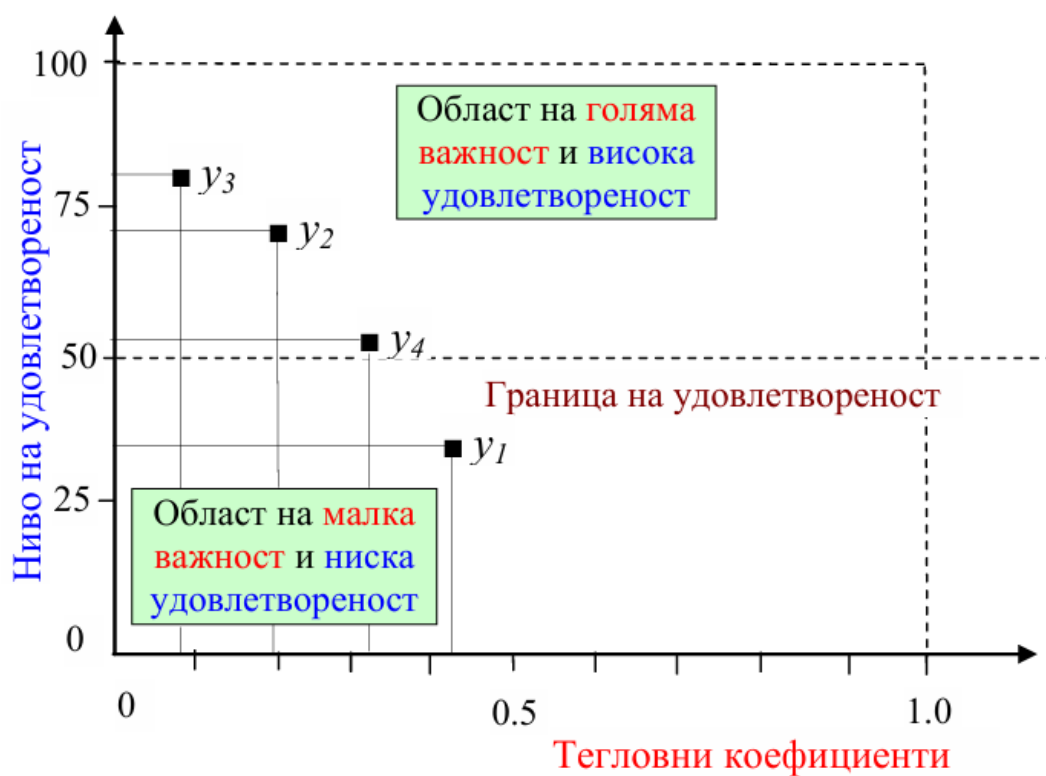
фиг.3.8

Прилагайки тегловните коефициенти за всеки от показателите, се получава промяна в удовлетвореността на анкетираниите, което е показано графично на фиг.3.9.



фиг.3.9

Показателите могат да бъдат представени графично в зависимост от нивото на удовлетвореност и нивото на значимост (тегловните коефициенти), фиг.3.10.



фиг.3.10

Три от показателите - y_4 , y_2 и y_3 са разположени в областта, отговаряща на голяма важност и висока удовлетвореност, а показател y_1 е в областта, съответстваща на малка важност и ниска удовлетвореност.

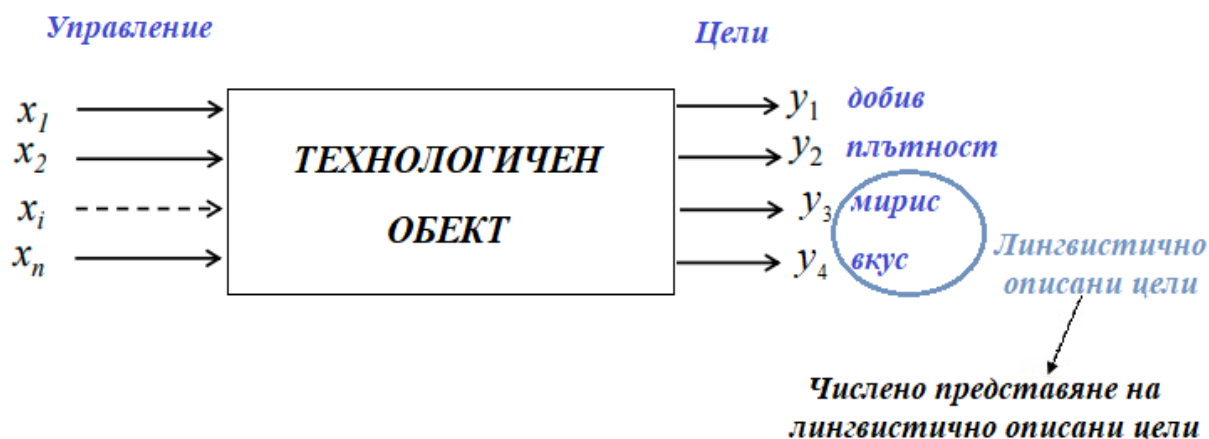
Вземане на решения при размити цели и размити условия.

Числено представяне на лингвистично описани цели

Много често при решаването на многокритериални задачи се налага вземане под внимание на показатели на качеството, които нямат реален физически смисъл (като напр. температура, плътност, добив и т.н.), а са субективни показатели. Т.е. те не могат да бъдат зададени с точни числени стойности, които да бъдат използвани при вземане на решението, а са лингвистично (словесно) описани.

4.1. Лингвистично описани цели

В много от задачите, които трябва да бъдат решени, има показатели на качеството, които нямат физически смисъл и съответно няма възможност да бъдат представени с конкретни числови стойности.



фиг.4.1

Показатели, които се задават лингвистично са напр. мирис, вкус, шум. За да могат тези показатели да бъдат използвани в задачите за многоцелева оптимизация, е необходимо да бъдат представени по някакъв начин в числов вид. Пример за такъв начин на представяне е даден в Таблица 4.1.

Таблица 4.1

$y_j(x)$ - Лингвистично описание	много лошо	лошо	приемливо	добро	много добро	превъзходно
$\mu_j(x)$ - Функция на принадлежност	0.0	0.1	0.37	0.6	0.8	1.0

За функцията на принадлежност $\mu_j(x)$ се дефинират числени стойности в зависимост от лингвистичното описание на показателя $y_j(x)$. За описание на показателя „много лошо“, за функцията на принадлежност се задава стойност „0“, а за описание на показателя „превъзходно“, $\mu_j(x)=1$. За описание на показателя „приемливо“, $\mu_j(x)=0.37$. Тази стойност е получена от Гомпертц, който е провел проучване, в което е изследвал субективните мнения и е създал т.нар. крива на Гомпертц. При нея, при стойност 0.37 има промяна на лошото към приемливо и следващо най-добро.

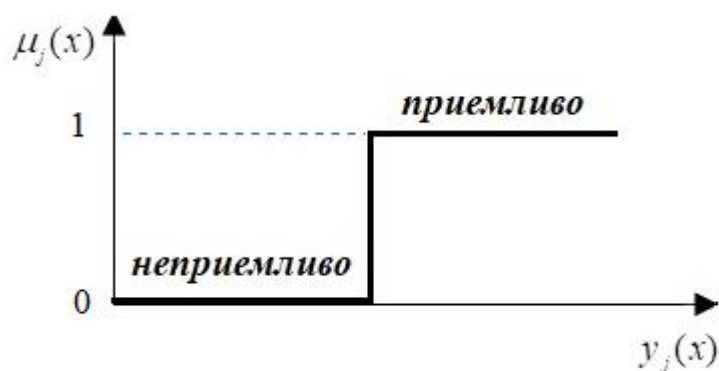
4.2. Графична трансформация на лингвистично описаните цели

Графичните трансформации предоставят други възможни скали за дефиниране на числени стойности за лингвистично описани показатели на качеството. Те могат да бъдат едностранни или двустранни, дву-, три- и многостепенни, стъпаловидни, многостъпални, триъгълни, трапецовидни и др.

- Едностранни скали на принадлежност

Двустепенна скала на принадлежност

Двустепенната скала на принадлежност е силно ограничаваща – фиг.4.1.

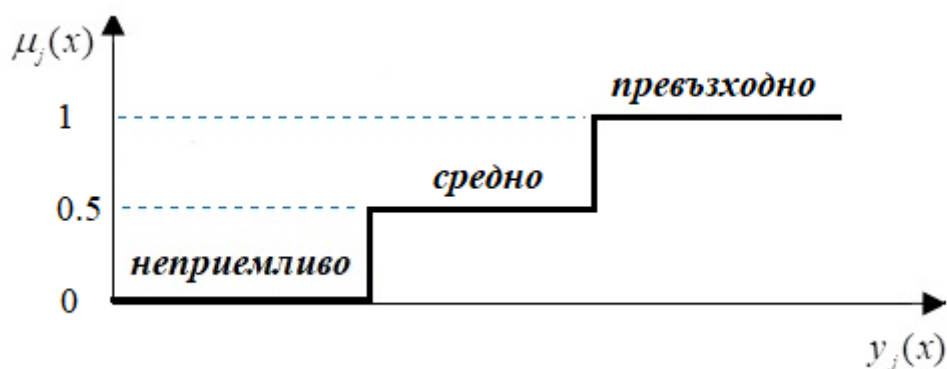


фиг.4.1

В този случай решенията са крайни и се свеждат до вариантите – „да, приемливо решение“ и „не, неприемливо“.

Тристепенна скала на принадлежност

Тристепенната скала на принадлежност е по-добро решение, т.к. дава възможност за избор на три варианта за решение – неприемливо, средно и превъзходно.



фиг.4.2

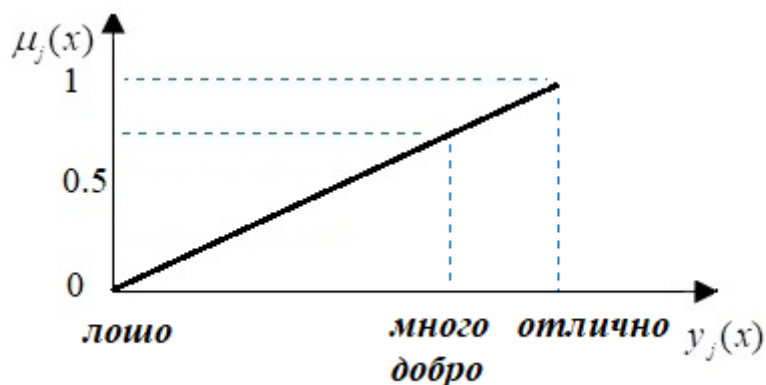
Многостепенна скала на принадлежност

По-точни стойности могат да бъдат получени при използване на многостепенна скала на принадлежност. Тя може да бъде линейна и експоненциална.

○ Многостепенна скала на принадлежност от линеен тип

При този начин за числено представяне на лингвистично описаните цели за „лошо“ се задава стойност „0“, на „отлично“ отговаря „1“, „много

добро“ е „0.7“ и т.н. (т.е. по линейната графика се определят стойностите за останалите степени на лингвистично описания показател – фиг.4.3).

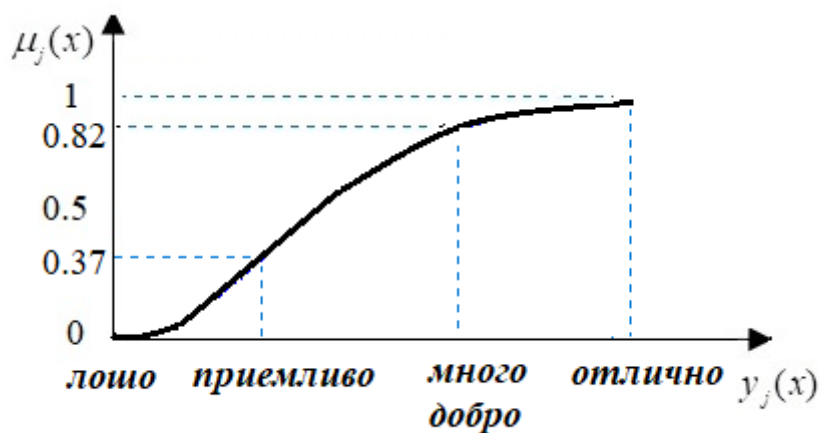


фиг.4.3

- Многостепенна скала на принадлежност от експоненциален тип

При този вариант на числено представяне, има бавно покачване на лингвистично описания показател по кривата, показана на фиг.4.4.

$$d_j \equiv \mu_j(x) = e^{-e^{-y_j}} \quad (4.1)$$

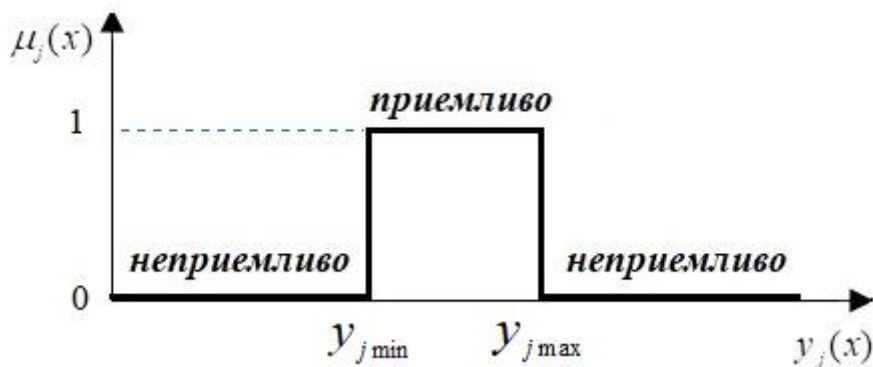


фиг.4.4

- Двустранни скали на принадлежност

Проста стъпаловидна скала на принадлежност

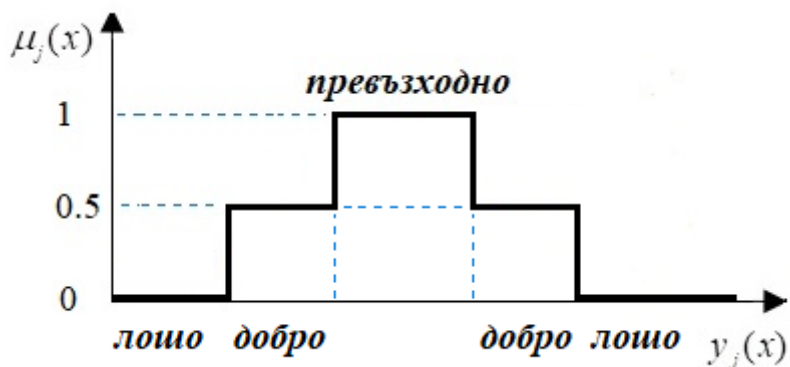
Тази скала се състои от три елемента – до определено описание на целевия показател, зададено като $y_{j\min}(x)$, решението е неприемливо. От $y_{j\min}(x)$ до $y_{j\max}(x)$ е приемливо и след това отново е неприемливо (фиг.4.5).



фиг.4.5

Многостъпална скала на принадлежност

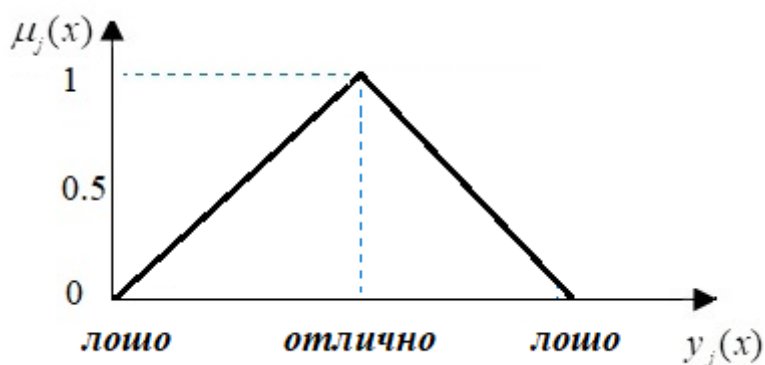
На фиг.4.6 е представена тристепенна (тристъпална) скала на принадлежност. До определена степен на лингвистично описание показател, решението е лошо, следва определен интервал, в който решението е добро, след това – превъзходно и по обратния ред – решението става добро, след което отново става лошо или неприемливо.



фиг.4.6

Триъгълна скала на принадлежност

Често прилагана е и триъгълната скала на принадлежност (фиг.4.7). При нея подобряването и влошаването на лингвистично описания показател става плавно от лошо до отлично и пак до лошо. Нарастването и влошаването не е задължително да бъдат симетрични, т.е. да се променят по един и същи начин.



фиг.4.7

Трапецовидна скала на принадлежност

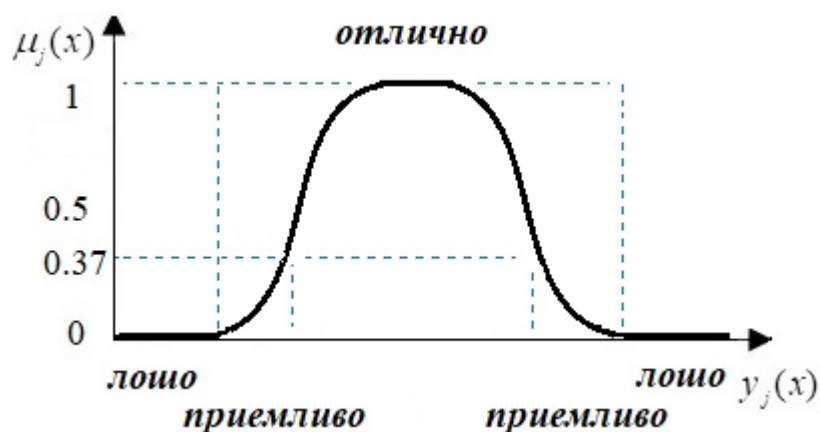
За разлика от триъгълната скала, при която състоянието „отлично“ е само връх в графиката, при трапецовидната скала на принадлежност това състояние е за по-дълъг интервал. Отново има плавно нарастване и намаляване на словесната оценка на лингвистично описания показател, като и тук не е задължително те да се променят по един и същи начин.



фиг.4.8

Експоненциална скала на принадлежност

Това е скалата, с която най-точно може да се направи числено представяне на лингвистично описаните показатели. При нея има бавно подобряване по експоненциална функция на оценката на показателя от „лоша“ към „приемлива“ до „отлична“ и след това по аналогичен начин обратно до „лоша“ (фиг.4.9).



фиг.4.9

Математическото описание на тази графична трансформация се извършва по формулите:

$$\mu_j(x) = e^{-(|y_j|)^n} \quad (4.2)$$

$$y'_j(x) = \frac{2y_j(x) - (y_{j\max} + y_{j\min})}{y_{j\max} - y_{j\min}} \quad (4.3)$$

$$n > 0, n = \frac{\ln \left[\ln \left(\frac{1}{\mu_j(x)} \right) \right]}{\ln |y_j^*|} \quad (4.4)$$

Стойностите за $y_{j\min}, y_{j\max}$ представляват най-малката и най-голямата неприемливи стойности за целевия параметър $y_j(x)$.

За изчисляване на $y'_j(x)$ и n , стойността за $\mu_j(x)$ се задава в интервала $(0.6 \div 0.9)$ за зададена стойност на $y_j(x)$.

Като се вземат под внимание показаните графични трансформации на лингвистично описаните показатели, те могат да бъдат представени в числов вид, в който да бъдат използвани при намиране на решения на многокритериални задачи.

Методи и алгоритми за вземане на решения при непълна информация

В много случаи при дефиниране на многокритериалните задачи има различни неопределености или непълна информация за дадени параметри, което разгледаните до тук подходи не отчитат. Проблемът за решаване на оптимизационни задачи при непълна информация е особено актуален на етапа проектиране на обекти или системи.

5.1. Непълна информация

Непълната информация е доста обширно понятие и може да обхваща различни аспекти на задачата за вземане на решение.



Фиг.5.1

Неопределеност или непълна информация може да има в структурата на използвания модел, както и структурна неопределеност на самия обект или система (фиг.5.1). В общия случай последното се свежда до намирането на такъв математичен модел, който да се свързва с параметрична неопределеност в модела, ограниченията или целевата функция, след което задачата се решава с подходите, които ще бъдат представени.

Причините за параметричната неопределеност се разделят на външни и вътрешни, като и двата вида могат да бъдат количествени и качествени неопределености, както и да бъдат с частична определеност или пълна неопределеност.

Частичната определеност може да бъде свързана с това

- да има зададени номинални стойности на параметрите, около които да се намират действителните им стойности;
- да е зададена функция на принадлежност
- да са зададени възможни граници на изменение на зададената неопределеност
- да бъде зададено математическо очакване, което всъщност е свързано и с наличието на номинални стойности
- да е зададена функция на статистическо разпределение или по какъв начин резултатите, които ще получаваме, могат да бъдат нормално разпределени, гаусово разпределени и т.н.

Вътрешни неопределености

Вътрешните неопределености са свързани със самия обект или система и представляват коефициенти за масопренасяне, топлопренасяне, константи на химични реакции, кинетични константи, стареене на оборудването, замърсяване на вътрешни повърхности и т.н. Това са вътрешни неопределености, които могат да се променят с времето без да може да се каже в определен момент какви са техните текущи стойности.

Външни неопределености

Външните неопределености са свързани с причини, които са извън обекта или системата и ще бъдат налични в даден момент от време. Става въпрос например за суровини и материали, които трябва да бъдат доставени. Неопределеността идва от там, че дадена суровина никога не е с едни и същи характеристики – може да има различни стойности на физическите си показатели или наличие на различни примеси, разлика в качеството и т.н.

Външна неопределеност е също цената – било то на суровините и материалите или на електроенергията.

Външна неопределеност е и държавната политика, както и политиката на конкурентите. Държавната политика може да определи какво да бъде производството на даден продукт – независимо дали става въпрос за разрешение или забрана за производството му. Политиката на конкурентите може да е свързана със задаване на цени за даден продукт, които в даден момент са непредвидими, т.е. има частична неопределеност, с пазарното търсене.

Влиянието на околната среда също спада към външните неопределености. Не е изключено върху обекта или дадения технологичен процес да има въздействие от към влажността на околната среда, температурата, атмосферното налягане и др.

Целта е, независимо от тези неопределености (било то вътрешни или външни), да се търси адаптивно управление или намиране на такова решение, което да е максимално нечувствително към тях.

5.2. Стратегии за решаване на оптимизационни задачи при непълна информация

Подходите за решаване на такива задачи и намиране на адаптивно управление са

- Максимално детерминиране на неопределеностите – това означава стойностите на неопределеност да бъдат намалени

колкото се може повече като се стигне или до много малки интервали, или до пълното определяне на дадените параметри, т.е. да имаме напълно детерминирана система;

- Синтезиране на оптимални системи, които са робастни към неопределеностите – тук целта е създадените системи за управление или мениджмънт да са максимално нечувствителни към дадените неопределености;
- Синтезиране на адаптивни системи – това означава системата да е самонастройваща се и при промяна стойността на даден параметър, тя да се промени спрямо новата стойност;
- Прилагане на различни стратегии за оптимизация в задачите с частична определеност, които ще бъдат разгледани по-долу.

Стратегии за оптимизация при неопределеност

Тези стратегии се базират на различни подходи като най-често срещаните са:

- Стратегии, базирани на минимизиране на чувствителността на решението към неопределеностите
- Стратегии, базирани на вероятностните характеристики на неопределените параметри
- Смесени стратегии, базирани на горните две, т.е. едновременно и на чувствителността, и на вероятностите

5.3. Формулировка на оптимизационната задача

За да бъде решена дадена задача, трябва да бъде дефинирана целевата функция и да са зададени управляващите параметри.

За разлика от базовите оптимизационни задачи, при тези с неопределености има допълнения към управляващите параметри и това са конструктивните параметри и параметри с непълна информация.

$$\max_{x \in X, d \in D} Q(x, d, p) \quad (5.1)$$

$$h(x, d, p) = 0, \quad (5.2)$$

$$g(x, d, p) \leq 0, \quad (5.3)$$

където

- x са управляващите параметри ;
- d са конструктивни параметри;
- p са параметри с непълна информация.

5.4. Стратегии, базирани на чувствителността на решението към неопределеностите

За стратегиите, базирани на чувствителността на решението към неопределеностите, има различни варианти, които могат да бъдат използвани.

Вариант 1

При стратегиите по чувствителност един от вариантите е, задачата да се сведе до създаване на обобщена функция, която да включва разликата на основната целева функция, в която са включени както управляващите параметри, така и конструктивните, и параметрите с непълна информация, и функцията на чувствителност, която също зависи от управляващите, конструктивните и неопределеностите.

$$\max_{x \in X, d \in D} [Q(x, d, p) - S_N(x, d, p)] \quad (5.4)$$

За функцията на неопределеност се използва формулата:

$$S_N(x, d, p) = \sum_{i=1}^m \lambda_{pi} \left| \frac{\partial Q(x, d, p)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_{Ni}}{Q(x, d, p_N)} \right| \quad (5.5)$$

където:

- $S_N(x, d, p)$ - функция на нормираната чувствителност ;
- p_{Ni} - номиналните стойности на параметрите с непълна информация;

- λ_{pi} - тегловни коефициенти за p_i , отчитащи значимостта на параметрите с непълна информация.

Търси се максимум на обобщената функция, като функцията на чувствителност трябва да има минимална стойност.

Недостатък в случая е, че има обединяване на две различни по съдържание целеви функции и в зависимост от преобладаващата функция, може да има изместване към екстремума или на едната от тях, или на другата.

Вариант 2

Друг вариант за решаване на оптимизационни задачи, при които има неопределеност, е с прилагане на *стратегия с ограничение по чувствителност*. В този случай един параметър се задава като управляващ (т.е. за оптимизиране), а другият се приема като ограничение. Дефинира се обобщената целева функция $Q(x, d, p)$, а за чувствителността се изисква да бъде под някаква зададена стойност.

$$\max_{x \in X, d \in D} Q(x, d, p), \quad (5.6)$$

$$\text{при } |S_N(x, d, p)| \leq S_{0i}, i = 1, 2, \dots, m \quad (5.7)$$

Особеното при този вариант е това, че трудно може да се определи колко да бъде тази зададена стойност за чувствителността (S_{0i}) или минималната чувствителност.

Вариант 3

За да бъде решена една двукритериална задача с неопределеност, могат да се използват разгледаните методи на препоръчаните решения (оптимистичен и песимистичен метод). Целта е да се намерят такива управляващи параметри x , които да максимизират функцията (5.1) и в същото време да минимизират функцията (5.5) [6, 7].

- ✓ Използване на метод с намиране на функцията на загубите (оптимистичен подход)

При използване на този подход се определят най-добрите стойности за всеки от параметрите. Задава се целевата функция, ограниченията, номиналните стойности на параметрите с непълна информация и функцията на чувствителност.

Намират се максимумът и минимумът на $Q(x, d, p_N)$:

$$- Q_{\max} = \max_{x \in X, d \in D} Q(x, d, p_N);$$

$$- Q_{\min} = \min_{x \in X, d \in D} Q(x, d, p_N);$$

Намират се максимумът и минимумът на $S_N(x, d, p_N)$:

$$- S_{\max} = \max_{x \in X, d \in D} S_N(x, d, p_N);$$

$$- S_{\min} = \min_{x \in X, d \in D} S_N(x, d, p_N);$$

Обобщената функция на загубите включва нормираната целева функция и нормираната функция на чувствителност и се търси нейната най-малка стойност.

$$\min_{x \in X, d \in D} \Phi_{\text{loss}}(x, d, p) = \min_{x \in X, d \in D} \left[\left(\frac{Q_{\max} - Q(x, d, p)}{Q_{\max} - Q_{\min}} \right)^2 W_Q + \left(\frac{S_{\min} - S_N(x, d, p)}{S_{\max} - S_{\min}} \right)^2 W_S \right] \quad (5.8)$$

където:

$$- W_Q \text{ и } W_S - \text{тегловни коефициенти.}$$

Могат да се използват и тегловни коефициенти (W_Q и W_S), ако такива са зададени. В противен случай те се приемат за 1.

- ✓ Използване на метод с намиране на функцията на полезност (песимистичен подход)

При песимистичния подход се задават най-лошите стойности за параметрите и се търси максималната стойност на функцията на полезност, която включва нормираната целева функция и нормираната функция на чувствителност.

$$\max_{x \in X, d \in D} \Phi_{use}(x, d, p) = \max_{x \in X, d \in D} \left[\left(\frac{Q(x, d, p) - Q_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \right)^2 W_Q + \left(\frac{S_{\max} - S_N(x, d, p)}{S_{\max} - S_{\min}} \right)^2 W_s \right] \quad (5.9)$$

При решаването на различни практически задачи, функцията на чувствителност може да има различна сложност и да се формира по различен начин. Като най-прост вариант тя може да има константна стойност, а в по-сложни случаи може да е линейна или нелинейна функция на управляващите параметри.

Приложение на стратегиите по чувствителност

Стратегиите по чувствителност се препоръчва да бъдат използвани при:

- Малък брой на параметрите с непълна информация p_i - максимум до 4;
- Малки граници на изменение на параметрите с непълна информация p_i ;
- Наличие на линейна зависимост (предполага се за това) на целевата функция в дадените граници на тези параметри p_i .

5.5. Стратегии, базирани на вероятностните характеристики на неопределените параметри (Стохастични стратегии)

При стохастичните стратегии е необходимо да се зададат функциите на разпределение $f(\mathbf{p})$ на неопределените параметри. Тези функции на разпределение могат да бъдат

- в интервал с равномерно разпределение, което означава, че в интервала $(p_{\min} \div p_{\max})$ всички стойности са еднакво възможни
- Гаусово разпределение (нормален закон за разпределение), т.е. при дадена номинална стойност се смята, че това е най-вероятната

възможност, а при отклонение в ляво или дясно има намаляване на тази вероятност.

Обобщената функция, която се дефинира, е сложна за пресмятане и има вида

$$\max_{x \in X, d \in D} \left(\iiint_{p \in P} Q(x, d, p) f(p) dp \right) \quad (5.10)$$

като се търси нейният максимум.

Тази формула има и друг вариант, а стратегията при която се използва се нарича *Минимизиране на риска на решението*. При нея се търсят различни решения за x и d , при което ще има минимум на тройния интеграл, а това минимизира риска на решението.

$$\min_{x \in X, d \in D} \left\{ \iiint_{p \in \Gamma} \left[\max_{x \in X, d \in D} Q(x, d, p) - Q(x, d, p) \right] f(p) dp \right\} \quad (5.11)$$

Има и по-прости стратегии, които могат да бъдат прилагани успешно. Такива са стратегиите по математическо очакване.

Стратегия на Grossmann [4]

Стратегията се състои в това да се максимизира по конструктивните параметри d математическото очакване E на максимумите на целевата функция по управляващи, конструктивни и неопределени параметри, като това математическо очакване е в пространството на неопределените параметри.

$$\max_{d \in D} E_{p \in P} \left(\max_{x \in X} Q(x, d, p) \right) \quad (5.12)$$

Стратегия на Стоянов [1, 2]

При тази стратегия за математическото очакване в рамките на неопределеностите се предлага да се търси едновременно максимум по конструктивни и максимум по управляващи параметри.

$$\max_{d \in D} \max_{x \in X} E(Q(x, d, p)) \quad (5.13)$$

$E_{p \in P}(\dots)$ е математическото очакване на $(\dots)$ в областта на неопределените параметри $p \in P$.

Предимството в този случай е, че решенията, които се получават, се припокриват, а времето за решаване е много по-малко.

Приложение на стохастичните стратегии

Стохастичните стратегии се препоръчва да бъдат прилагани когато:

- интервалите на неопределеност на p_i са големи;
- се познава вида на разпределение на неопределените параметри.

Недостатъкът на стохастичните стратегии е големият обем от необходими изчисления за получаване на решението.

5.6. Минмаксни стратегии

Най-често използваните минмаксни стратегии са: *Основната игрова стратегия* и *Модифицирана стратегия*.

Основната игрова стратегия

За да бъде приложена стратегията, е необходимо да бъдат зададени границите на изменение на неопределените параметри - $(p_{\min} \div p_{\max})$, допустимото пространство на управляващите параметри, вида на търсения екстремум и др.

Същността на минмаксните стратегии се състои в това – при търсене на максимума на целевата функция с управлението, а в нея фигурират и неопределености, то трябва от всички възможни неопределености да се избере този вариант, при който тя да е минимална, т.е. от всички максимуми се избира най-малкият възможен с надеждата в реална ситуация ще се случи по-добро. В случай, че за целевата функция се търси

минимум, то тогава се избира максимума на получените минимални стойности.

$$\min_{p \in P} \left[\max_{x \in X, d \in D} Q(x, d, p) \right] \quad (5.14)$$

Търсенето на решение с помощта на описаната стратегия е ефективно когато максимумът на целевата функция е линейна функция от неопределените параметри. В случай, че тя е нелинейна, полученото решение може да се окаже неминимаксно.

Модифицирана стратегия на Стоянов

При тази стратегия се пресмята нормираната стойност на целевата функция и се търси минималната стойност по отношение на неопределените параметри, след което от всички се избира максималната по управляващите и конструктивните параметри.

$$\max_{x \in X, d \in D} \left\{ \min_{p \in P} \left[\frac{\max_{x \in X, d \in D} Q(x, d, p) - Q(x, d, p)}{\max_{x \in X, d \in D} Q(x, d, p)} \right] \right\} \quad (5.15)$$

Всъщност универсална стратегия, която може да бъде препоръчана при решаването на всяка многокритериална задача с наличие на непълна информация, не съществува.

Така разгледаните стратегии са приложими за решаването на оптимизационни задачи, при които има наличие на непълна информация или неопределени параметри като в зависимост от конкретната задача и разгледаните особености на стратегиите, се избира тази, която е най-подходяща.

Информационно обезпечаване при оптимално вземане на решения

В съвременната среда на бързо развиващи се технологии и нарастваща комплексност на управленските процеси, ефективното вземане на решения изисква надеждно и навременно информационно обезпечаване. Информацията служи като основа за анализ, прогнозиране и избор на най-адекватната алтернатива в условия на неопределеност и риск. Оптималното вземане на решения е немислимо без интегрирани системи за събиране, обработка и интерпретация на данни, които подпомагат субективната оценка с обективни показатели. Ето защо информационното обезпечаване се превръща в ключов фактор за стратегическото управление, повишаването на ефективността и вземане на решения в различни сфери на дейност.

Друг важен момент при намиране на оптимално решение на многокритериален проблем, е изборът на подходяща стратегия.

Необходимата информация при оптималното вземане на решения може да бъде получена чрез:

- Литературно и друго проучване;
- Задаване на въпроси;
- Събиране на информация и данни;
- Провеждане на експерименти;
- Статистическа обработка на резултатите.

При събиране на информация чрез анкетиране се използват два подхода:

- Чрез логични и последователни въпроси, т.е. с логична последователност от един въпрос към друг въпрос;
- Чрез въпроси с радикално "прескачане" от въпрос на въпрос, включително и задаване на объркващи въпроси

Основната тенденция в последователността на анкетирането е:

- Задаването на общи въпроси;
- Плавно преминаване към специфични въпроси.

Много е важно да се определи дали анкетираният е компетентен по дадената тема, с което се установява неговата обща информираност. За тази цел се задават конкретни въпроси от типа: „Знаете ли, че...?“

Следват въпроси, с помощта на които да се определи дали анкетираният има определено мнение по обсъждания проблем/въпрос и какво е общото мнение по дадения въпрос.

- „Мислите ли, че....?“
- „Съгласен ли сте да....?“

Възможностите за отговор могат да бъдат

- само с „Да“ и „Не“,
- или с няколко възможности за степенуване на отговорите – „Напълно съм съгласен“, „Не съм сигурен“, „Категорично съм против“ и т.н.

Анкетирането може да продължи в областта на специфична част от поставения проблем като целта е с помощта на просто формулирани въпроси да се определи посоката на по-нататъшното анкетиране, т.е. на следващите въпроси.

Могат да бъдат задавани и въпроси, с които да се определят причините за мнението на анкетирания, на които той да отговори в свободен текст или да му бъдат предложени различни варианти за отговор.

Част от анкетирането може да бъде свързана с ранжирането и съгласуването на мненията на отделните анкетирани като целта е натрупване на информация, която да бъде използвана при оптималното вземане на решения.

Въпросите при провеждане на анкетиране могат да бъдат както отворени, така и затворени.

При отворените въпроси анкетираните дават свободен отговор на поставения въпрос. Това дава възможност за даване на много и

непредсказуеми отговори, което може да се използва при необходимост от получаване на много и различни мнения.

При затворените въпроси (въпроси с определени отговори) отговорите са предварително дефинирани и анкетираният трябва да избере от тях. В зависимост от целта на анкетата, може да има избор на един от посочените отговори или ранжиране по важност на всички зададени отговори. Тези въпроси се използват при събиране на статистическа информация по даден въпрос.

При анкетирането има и такива въпроси, които не се препоръчва да бъдат задавани. Въпроси от този тип са:

- Въпроси с предопределен насочващ отговор – „Избрахте този вариант защото...?”
- Прекалено дълги въпроси;
- Въпроси с трудно разбираеми думи – т.к. не е ясно предварително каква е степента на информираност на анкетирания, е по-добре въпросите да бъдат кратки, ясни и лесно разбираеми.
- Шокиращи въпроси;
- Условни въпроси;
- Въпроси, съдържащи повече от една инструкции за отговор;

Ефективното вземане на решения в съвременната динамична среда зависи от качествено информационно обезпечаване, основано на надеждни данни и подходящи методи за тяхното събиране и анализ.

Анкетирането е ключов инструмент в процеса на вземане на решения, като правилното му структуриране гарантира обективност и пълнота на събраната информация. Изборът на подходящи въпроси и подход при провеждането на анкетите е от съществено значение за вземането на информирани и оптимални управленски решения.

Литература

1. Павлова, Р., С.Стойанов, Ц.Джонов, И.Ангелов, Оптимизация на свойствата на стомани при непълна информация за състава им, Машиностроене, 1987, №12
2. Павлова, Р., Оптимизация на технологични обекти и системи при непълна информация, Дис.С., 1988, Машиноп.
3. Р. Фишер, Статистические методы для исследователей, руски превод, Госстатиздат, Москва. 1958.
4. Grossmann, I.E., K.P.Halemane, R.E.Swaney. Optimization Strategies for Flexible Chemical processes. Simp.PSE'82, 23-27 August, Kyoto, Japan, 1982.
5. Kendall, M.G., Rank Correlation Methods, London, Griffin, 1957
6. Stoyanov, S.K., R.B.Pavlova. Optimization with Uncertainties as a Doublecriteria Problem, 7-th Int.Congress CHISA'81, Praha, Czechoslovakia, 1981.
7. Stoyanov, S.K., Towards Optimization under Uncertainties as a Multicriteria Problem, IIASA Report, CP-82-S12, Laxenburg, Austria, 1982.