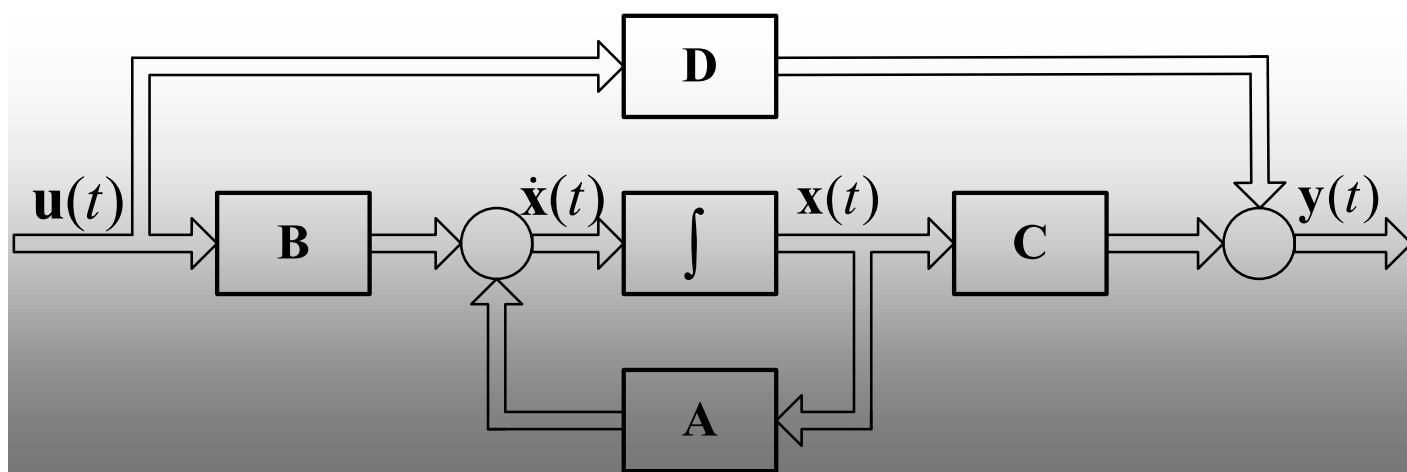


*Христо Христов
Петър Иванов*

ТЕОРИЯ НА АВТОМАТИЧНОТО РЕГУЛИРАНЕ И УПРАВЛЕНИЕ



Доц. д-р инж. Христо Недев Христов

Доц. д-р инж. Петър Серафимов Иванов

ТЕОРИЯ НА АВТОМАТИЧНО РЕГУЛИРАНЕ И УПРАВЛЕНИЕ

КЛАСИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НА
АВТОМАТИЧНИ СИСТЕМИ



УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО
“**ВАСИЛ АПРИЛОВ**”
ГАБРОВО, 2026

Курсът по „Теория на автоматично регулиране и управление“ е предназначен за студентите от специалности „Индустриални топлинни и газови системи“, Отоплителна, вентилационна, климатична и газова техника“, Хидравлична и пневматична техника“ от факултет „Машиностроене и уредостроене“ при „Технически университет – Габрово“ както и студенти от други специалности, факултети и университети, изучаващи едноименната дисциплина.

Учебникът може да бъде използван също и от инженерно-техническия персонал при производството и експлоатацията на автоматични системи, хидравлични, пневматични, механични, електрически, топлинни, газови и др. системи, машини и инсталации.

Автори:

Доц. д-р инж. Христо Недев Христов

Доц. д-р инж. Петър Серафимов Иванов

ТЕОРИЯ НА АВТОМАТИЧНО РЕГУЛИРАНЕ И УПРАВЛЕНИЕ

КЛАСИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗ И СИНТЕЗ НА АВТОМАТИЧНИ СИСТЕМИ

Рецензент:

Проф. дн. инж. Димитър Андонов

Дичев

ISBN: 978-954-683-744-8

ПРЕДГОВОР

Учебникът по „Теория на автоматично регулиране и управление“ предоставя на студентите от различните инженерни специалности основни знания за понятията и принципите на автоматичното регулиране и управление, математическото моделиране на динамични системи, предавателните функции, структурните схеми, устойчивостта, качеството на регулиране, честотните методи за анализ, както и за синтеза на регулатори.

Материалът е структуриран в логическа последователност, позволяваща по-лесното му възприемане от студентите, които през последните години изпитват все по-големи затруднения, особено при използването на математическия апарат. Към всяка глава са включени примери и графики, илюстриращи изложението и подпомагащи по-пълното усвояване на разглеждания материал.

Учебникът е съобразен със съответните учебни програми и отразява дългогодишния опит на авторите при преподаването на дисциплината „Теория на автоматично регулиране и управление“.

Ще приемем с благодарност всички забележки и препоръки, отправени към авторите и към учебника, които биха допринесли за подобряване на неговото качество и за по-лесното възприемане на изложената материя.

Авторите изказват своята благодарност на проф. дн инж. Димитър Дичев за изчерпателната и компетентна рецензия.

Хр. Христов

Габрово, 2026

СЪДЪРЖАНИЕ

ВЪВЕДЕНИЕ	1
 ГЛАВА 1	
КЛАСИФИКАЦИЯ НА АВТОМАТИЧНИТЕ СИСТЕМИ	
1.1. Основни понятия.	10
1.2. Класификация на автоматичните системи по предназначение.	13
1.3. Понятие за автоматично регулиране.	14
1.4. Примери за обекти за регулиране.	15
 ГЛАВА 2	
ПРИНЦИПИ НА РЕГУЛИРАНЕ НА СИСТЕМИТЕ ЗА АВТОМАТИЧНО РЕГУЛИРАНЕ	
2.1. Принцип на регулиране по смущение	19
2.2. Принцип на регулиране по отклонение (грешка)	22
 ГЛАВА 3	
КЛАСИФИКАЦИЯ НА САР СПОРЕД ФУНКЦИОНАЛНОТО ИМ ДЕЙСТВИЕ	
3.1. Класификация според допълнителния източник на енергия.	29
3.2. Класификация според искания закон за изменение на регулируемата величина канали	32
3.3. Статични и астатични системи.	34
 ГЛАВА 4	
НЕПРЕКЪСНАТИ (АНАЛОГОВИ) И ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	
4.1. Понятие за квантоване на системите.	36
4.2. Системи с непрекъсната модулация.	37
4.3. Системи с дискретна модулация.	39
4.4. Класификация на автоматичните регулатори. Понятие за закони за регулиране.	45
4.5. Основни задачи на теорията на автоматичното регулиране и управление.	51
 ГЛАВА 5	
ДИНАМИЧНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ЛИНЕЙНИ ЕЛЕМЕНТИ И СИСТЕМИ – СЪСТАВЯНЕ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ	
5.1. Понятие за динамично звено. Статични и динамични характеристики на динамичните звена	59
5.2. Съставяне на динамичните характеристики на динамични звена.	62
5.3. Линеаризация на нелинейните уравнения на динамичните звена.	63
5.4. Стандартна форма на запис на уравнения на динамичните звена.	65
5.5. Привеждане на диференциалните уравнения в безразмерна форма.	70
5.6. Примери за съставяне на диференциалните уравнения на динамични звена... .	74

ГЛАВА 6

ПРЕДАВАТЕЛНИ ФУНКЦИИ НА ЛИНЕЙНИ ЗВЕНА. СВЪРЗВАНЕ НА ЗВЕНАТА В СИСТЕМИТЕ

6.1. Предавателни функции на линейни динамични звена.	79
6.2. Структурни схеми на автоматични системи.	84
6.3. Предавателна функция на основни съединения на линейните звена.	86
6.4. Структурни преобразувания	91
6.5. Примери за преобразуване на структурни схеми.	93

ГЛАВА 7

ОСНОВНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ОПЕРАТОРНОТО СМЯТАНЕ

7.1. Въведение в преобразованието на Лаплас.	98
7.2. Основни свойства на изображението на Лаплас	100
7.3. Примери за използване на операторното смятане.	105

ГЛАВА 8

ВРЕМЕННИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ЛИНЕЙНИ ЗВЕНА

8.1. Преходна функция/характеристика.	112
8.2. Тегловна функция/характеристика.	114
8.3. Честотни характеристики.	116
8.4. Честотни характеристики при основните свързвания на звената.	122
8.5. Логаритмични честотни характеристики.	124

ГЛАВА 9

ЕЛЕМЕНТАРНИ /ТИПОВИ/ ДИНАМИЧНИ ЗВЕНА И ТЕХНИТЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

9.1. Позиционни звена	129
9.2. Идеално /безинерционно/ звено.	129
9.3. Аперiodично звено от 1 ред.	132
9.4. Аперiodично звено от 2 ред.	138
9.5. Колебателно звено.	144
9.6. Консервативно звено.	149
9.7. Интегриращи звена.	151
9.8. Реално интегриращо звено /инерционно интегриращо звено.	153
9.9. Изодромно звено.	155
9.10. Диференциращи звена.	158
9.11. Звено с чисто закъснение.	161
9.12. Построяване на логаритмични честотни характеристики (ЛАЧХ) на последователно свързани звена.	164

ГЛАВА 10

СТРУКТУРНИ СХЕМИ И УРАВНЕНИЯ НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ

10.1. Съставяне на диференциалните уравнения на линейни системи.	166
--	-----

10.2. Предавателни функции на линейни системи.	166
10.3. Предавателна функция на затворената система /главен оператор на САР/. . . .	169
10.4. Предавателна функция на затворената система по смущение.	170

ГЛАВА 11

УСТОЙЧИВОСТ И КАЧЕСТВО НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ

11.1. Понятие за устойчивост на линейни системи за автоматични регулиране	174
11.2. Критерий за устойчивост на Раус-Хурвиц.	179
11.3. Критерий на Щур (Schur-Cohn stability criterion), известен също като метод на Щур-Кон.	182
11.4. Критерий за устойчивост на Михайлов.	183
11.5. Област на устойчивост на системата за автоматично регулиране D-разбиване.	189
11.6. Критерий за устойчивост на Найквист.	192
11.7. Критерий на Боде.	197
11.8. Критерии за качество.	200
11.9. Критерий за точност.	201
11.10. Точност при типови въздействия.	203
11.11. Оценка на запаса от устойчивост и бързодействие по преходната характеристика.	210
11.12. Оценка на запаса от устойчивост и бързодействие по разположение на корените на характеристичното уравнение.	211
11.13. Оценка на запаса на устойчивост и бързодействие по честотни показатели на качеството.	215
11.14. Интегрални критерии за оценка на качеството.	221

ГЛАВА 12

НЕЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ ЗА АВТОМАТИЧНО РЕГУЛИРАНЕ

12.1. Типични нелинейности.	223
12.2. Особенности на поведението на нелинейните системи.	230
12.3. Устойчивост на нелинейни системи.	233
12.4. Теорема на Ляпунов за устойчивост на движението.	234
12.5. Метод на първото приближение.	235
12.6. Пряк метод на Ляпунов.	238
12.7. Фазови траектории.	242
12.8. Фазови траектории на линейни системи.	244
12.9. Фазови траектории на нелинейни системи.	249
12.10. Авто-колебания в нелинейни системи.	2623
12.11. Метод на хармонична линеаризация.	2645
12.12. Преходни процеси възникващи в нелинейни системи. Оценка на качеството на нелинейните преходни процеси.	2721

12.13. Диаграми на качеството на системите.	273
ГЛАВА 13	
МЕТОДИ ЗА ПОДОБРЯВАНЕ НА ПРОЦЕСА НА РЕГУЛИРАНЕ И МЕТОДИ ЗА СИНТЕЗ НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ	
13.1. Повишаване точността на системите за автоматично регулиране	282
13.2. Коригиращи звена и методи за синтеза им.	282
13.3. Последователни коригиращи устройства – филтри.	284
13.4. Паралелни коригиращи звена.	289
13.5. Коригиращи устройства по външно въздействие. Инвариантност.	293
ГЛАВА 14	
СИНТЕЗ НА АВТОМАТИЧНИ СИСТЕМИ	
14.1. Синтез на коригиращи устройства с използване на логаритмични честотни характеристики	298
14.2. Оптимален синтез.	303
14.3. Използване на класически вариационни методи.	306
14.4. Метод на динамичното програмиране.	307
14.5. Уравнение на Белман.	308
14.6. Аналитично конструиране на регулатори.	309
14.7. Нелинейна оптимизация на автоматичните системи. Принцип на максимумите	310
ГЛАВА 15	
ОПИСАНИЕ НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ В ПРОСТРАНСТВОТО НА СЪСТОЯНИЯТА	
15.1. Уравнение на състоянието. Уравнение на изхода.	318
15.2. Промяна на базиса в пространството на състоянията.	320
15.3. Канонични описания на едномерни системи.	320
15.4. Модели в пространство на състоянията получени от предавателната функция на системата	327
15.5. Формула на Коши. Преходна матрица.	330
15.6. Изчисляване на преходната матрица.	331
15.7. Матрична предавателна функция.	332
15.8. Управляемост и наблюдаемост на линейни динамични системи.	333
15.9. Наблюдаемост на линейни системи.	334
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Характеристики на динамични типови звена.	336
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Основни преобразувания на Лаплас	341
ЛИТЕРАТУРА.	345

ВЪВЕДЕНИЕ

Съвременното инженерство е немислимо без системи за автоматично регулиране и управление. От индустриалните производствени линии и енергийните системи до роботиката, автомобилите, авиацията и интелигентните устройства – навсякъде присъстват процеси, които трябва да бъдат наблюдавани, управлявани и оптимизирани. Развитието на автоматизацията е един от основните фактори за повишаване на производителността, надеждността и безопасността в техническите системи.

Дисциплината „Теория на автоматично регулиране и управление“ изучава принципите, методите и средствата за анализ, моделиране, синтез и изследване на системи, способни самостоятелно да поддържат зададени режими на работа при наличие на външни въздействия и смущения. Основна цел на управлението е постигането на желаното поведение на даден обект чрез използване на подходящи управляващи въздействия.

Развитието на автоматичното регулиране и управление е тясно свързано с развитието на техниката, индустрията и науката. Още в древността хората са използвали елементарни механизми за автоматично поддържане на определени процеси. Един от най-ранните примери е поплавковият регулатор за поддържане нивото на водата, използван в древните водни часовници.

Съществено развитие в областта настъпва през XVIII век с индустриалната революция. През 1788 г. английският инженер James Watt разработва центробежен регулатор за парни машини, който автоматично поддържа постоянна скорост на въртене. Това устройство се счита за едно от първите практически приложения на автоматично регулиране с обратна връзка.

През XIX век започва теоретичното изследване на системите за управление. Значителен принос имат учени като James Clerk Maxwell, който анализира устойчивостта на регулаторите, и Edward John Routh, разработил методи за изследване устойчивостта на динамични системи. По-късно Adolf Hurwitz формулира критерия на Раут–Хурвиц, който и днес е основен инструмент в теорията на управлението.

През първата половина на XX век бързото развитие на електротехниката, телекомуникациите и военното дело води до значителен напредък в автоматичното управление. Появяват се сервомеханизмите, автоматичните системи за насочване и първите електронни регулатори. По време на Втората световна война необходимостта от управление на сложни технически системи ускорява развитието на нови математически методи.

Особено голямо значение има трудът на Norbert Wiener, който поставя основите на кибернетиката – науката за управлението и комуникацията в машините и живите организми. В средата на XX век се формира съвременната теория на автоматичното управление, основана на математическо моделиране, теория на системите и методи за оптимално управление.

С навлизането на цифровите технологии и компютрите през втората половина на XX век автоматичното управление претърпява нов етап на

развитие. Аналоговите системи постепенно са заменени от цифрови регулатори, микропроцесори и програмируеми логически контролери. Това позволява реализирането на сложни алгоритми за управление в реално време.

Днес автоматичното регулиране и управление е ключова област в развитието на роботиката, автономните системи, изкуствения интелект, индустриалната автоматизация, енергетиката, транспорта и космическите технологии. Съвременните системи за управление осигуряват висока точност, надеждност и адаптивност, като играят решаваща роля в цифровата трансформация на индустрията и обществото.

Настоящият учебник е предназначен за студенти от „Технически университет – Габрово“ или други университети, обучаващи се в инженерни специалности, свързани с автоматизация, енергетика, електротехника, мехатроника, електроника, информационни технологии и машинно инженерство. Материалът е структуриран така, че да осигури както необходимата теоретична подготовка, така и практическа насоченост при анализа и проектирането на системи за управление.

В учебника са разгледани основните понятия и принципи на автоматичното регулиране и управление, математическото моделиране на динамични системи, преподавателните функции, структурните схеми, устойчивостта, качеството на регулиране, честотните методи за анализ, както и синтезът на регулатори. Особено внимание е отделено на връзката между теоретичните постановки и тяхното приложение в реални инженерни задачи.

Съдържанието е разработено с идеята да подпомогне студентите при усвояването на аналитично мислене и инженерни умения за решаване на практически проблеми. Включени са примери, задачи и илюстрации, които улесняват разбирането на сложните процеси и насърчават самостоятелната работа.

Авторите се надяват, че този учебник ще бъде полезен както за обучението на бъдещите инженери, така и като основа за по-нататъшно задълбочено изучаване на теорията и практиката на автоматичното управление – област, която продължава да играе ключова роля в развитието на съвременните технологии и индустрия.

ГЛАВА 1.

КЛАСИФИКАЦИЯ НА АВТОМАТИЧНИТЕ СИСТЕМИ

1.1. Основни понятия

Съвременното производство се характеризира с непрекъснато увеличаване производителността и намаляване себестойността на произвежданата продукция. Това е свързано с широкото внедряване на автоматиката и средствата за автоматизация, със създаването на нови елементи на автоматичните системи и нови принципи на тяхното постояване.

Една от отличителните особености на автоматиката като научна дисциплина е изясняване и практическото използване на общите закономерности, които се използват при работата на автоматични системи от най-различна физична природа.

- механични ;
- хидравлични;
- електрони;
- пневматични;
- електрически
- и др.

Работата на която и да е автоматична система, от най-елементарната до най-сложната, се базира на едни и същи основни принципи. Детайлното познаване на същността на тези принципи и основите на автоматиката е необходимо за правилното усвояване на принципа на действие, особеностите на функциониране и експлоатация на автоматичните устройства в различни области на индустрията.

Устройството, агрегат, машина и въобще каквато и да е система се нарича **автоматично**, ако то изпълнява своите функции без непосредствено участие на човек.

Внедряването в производството на автоматични устройства се нарича **автоматизация**.

Понятието автоматизация е тясно свързано с понятието *механизация*. Същността на механизацията е внедряването на машини и механизми в производствените процеси, където се заменя напълно или частично физическия труд на човека. При механизацията функциите по управление на работата на машините и контрола на резултатите се оставят на човека.

Автоматизацията е по-висш етап в развитието на техниката. При автоматизацията функциите на контрол и управление също се оставят на машините. За човека остават функциите за пускане, настройка и общо наблюдение на машините. Задачата на автоматизацията е да осъществи автоматично управление на различни производствени процеси.

В съвременната техника автоматичните устройства са получили изключително широко разпространение. На определен етап от развитието на

техниката за човека става невъзможно да управлява бързо, точно и ефективно съществуващите машини. Физиологичните възможности на човека като управляваща система представляват пречка за по-нататъшното усъвършенстване на техническите системи. Ефективното използване на производствените и други агрегати, разработването на нови високопроизводителни системи са възможни само с управление от машини. Освен това някои процеси в промишлеността, транспорта и във военното дело са съпроводени с опасни за човека въздействия от химичен, топлинен, радиационен и друг характер и за това не могат да се управляват ръчно. Автоматизацията на такива процеси позволява практически да се осъществят производствени процеси, средства за съобщения, комуникации, средства за защита, които без нея биха били невъзможни. Като примери могат да се посочат химически заводи, атомни електроцентрали, транспортни средства /кораби, самолети, космически кораби, локомотиви, подводници и др./.

Осъществяването на функциите по управление и контрол винаги е свързано с необходимостта от изпълнение редица логически и математични операции, които са присъщи на умствената дейност на човека. Като се прехвърлят тези операции на техническите устройства, автоматизацията облекчава умствената дейност на човека.

Автоматизацията има не само икономическо но и голямо социално значение. Чрез автоматизацията се променя характера на труда, повишава се нивото на обслужвания персонал.

Във връзка с появата и развитието на автоматични устройства възниква и нова област на науката и техниката, занимаваща се с тяхното изучаване – **автоматика**.

Автоматиката е приложена научна дисциплина, изучаваща принципите на построяване и методите за пресмятане на автоматичните системи. **Автоматичната система** е съвкупност от технически устройства, изпълняващи своите основни функции без непосредственото участие на човека. Автоматиката включва:

- Теорията на автоматичното управление ТАУ
- Теорията на техническите средства (елементите) на автоматиката

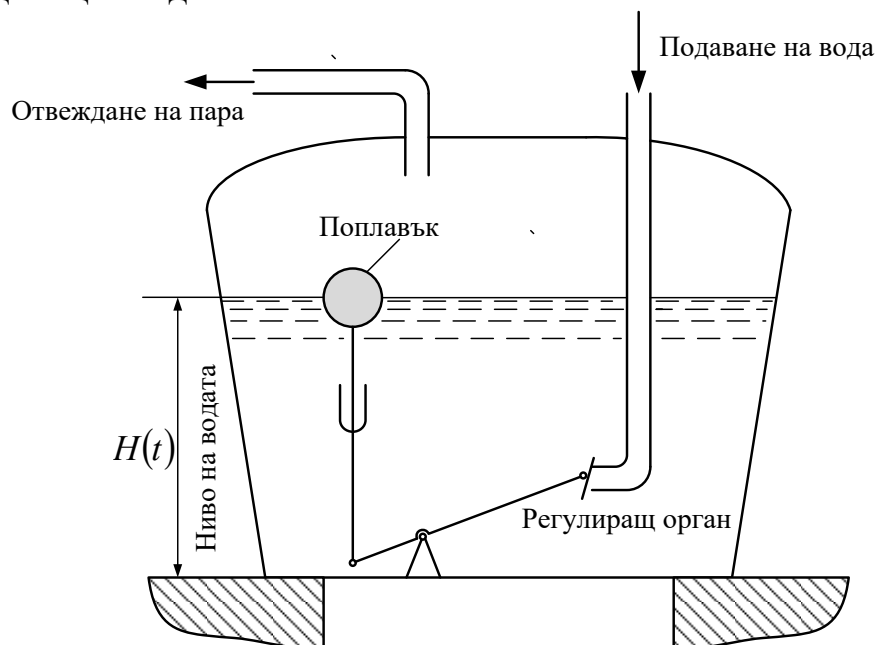
Теорията на елементите на автоматиката се занимава с принципите на построяване и методите за пресмятане на елементите на автоматичните системи – датчици, усилватели, двигатели и др. Предмета на ТАУ е изучаване на автоматичните системи като цяло.

Идеята за създаване на машини които работят сами без участието на човека е възникнала отдавна. Първите автоматични устройства с промишлено предназначение са се появили във връзка с развитието и изобретяването на парните машини и турбини.

Един от първите в историята на техниката автоматични регулатори е бил изобретен от И. И. Ползунов през 1765 г. Това бил автоматичен регулатор за нивото на вода в котела на неговата парна машина – фиг. 1.1.

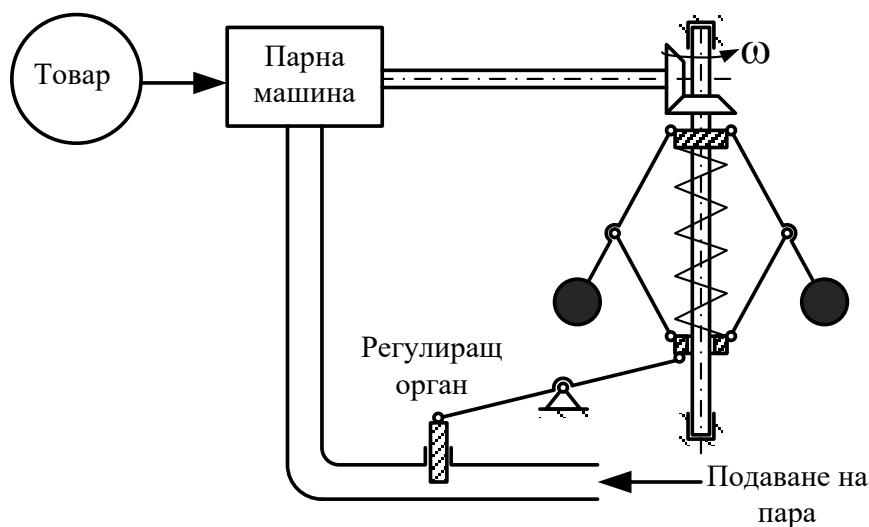
Измервателното устройство (поплавъка) измерва регулируемата величина (височината на водата в котела) и премества регулационния орган (клапана за подаването на водата). Парния котел представлява обект за регулиране.

Изменението на количеството отведена пара от котела към парната машина е основно смущаващо въздействие.



Фиг. 1.1. Схема на регулатор на ниво

При увеличаване на количеството на отведената пара, изпарението на водата се става по интензивно и нивото ѝ започва да пада. Поплавъкът, заедно с лостовата система се премества надолу, увеличава се проходното сечение на клапана и се подава повече вода.



Фиг. 1.2. Схема на центробежен регулатор на скоростта на вала на парна машина

През 1788 г. от Джеймс Уат е изобретен центробежен регулатор за регулиране скоростта на въртене на вала на парната машина – фиг. 1.2.

Центробежният механизъм реагира на изменението на ъгловата скорост ω на вала на машината. Така, ако ъгловата скорост на вала се увеличава, тежестите на центробежния се отдалечават от оста на въртене, подвижната втулка се повдига и премества регулиращия орган. Това променя притока на енергия в машината, които компенсира нежеланото отклонение на ъгловата скорост.

1.2. Класификация на автоматичните системи по предназначение

В съвременната техника се използва голямо разнообразие от автоматични устройства и системи, различаващи се по физическата си природа, принципа на действие, схеми и конструктивни решения. Всички тези устройства и системи са предназначени за няколко основни задачи на автоматизацията:

- Системи за автоматична сигнализация – за известяване на обслужващия персонал за състоянието на една или друга техническа система, или за протичането на различни процеси.
- Система за автоматичен контрол – осъществява без участие на човека контрола на различни параметри и величини, характеризиращи работата на технически агрегат или протичане на процес.
- Система за автоматична блокировка и защита – за предотвратяване на аварийни ситуации. Когато една величина достигне своето критично значение, системата за автоматична блокировка и защита, без участието на човека, оказва въздействие на защитавания агрегат, частично или напълно прекратява работата му.
- Системи за автоматично пускане и спиране – осъществява включване и спиране (може и реверсиране) на различни двигатели и задвижвания по зададената програма.
- Системи за автоматично управление – управление на работата на техническите апарати или процеси без непосредственото участие на човека.

Най-важни, същевременно и най-сложни са системите за автоматично управление

Управление /в широкия смисъл на понятието/ се нарича организация на определен процес, осигуряваща достигането на поставената цел. Управляван процес може да бъде процеса на движение в транспорта. Целта на управлението в този случай може да е достигането до зададена точка от маршрута за определено време и минимални разходи. Управляван процес може да е процеса на производство на определен продукт или изделие. Целта на управлението в този случай обикновено е създаване на изделие със зададени характеристики и свойства при минимална себестойност.

Управляемите процеси, както и целите на управлението могат да бъдат най-разнообразни. Това определя съществуването на голямо разнообразие на системи за автоматично управление, които се класифицират по различни признаци.

В зависимост от предназначението всички системи за автоматично управление могат да се разделят на:

- Системи за автоматично регулиране
- Кибернетични системи

Системите за автоматично регулиране решават задачата за регулиране работата на определен технически агрегат.

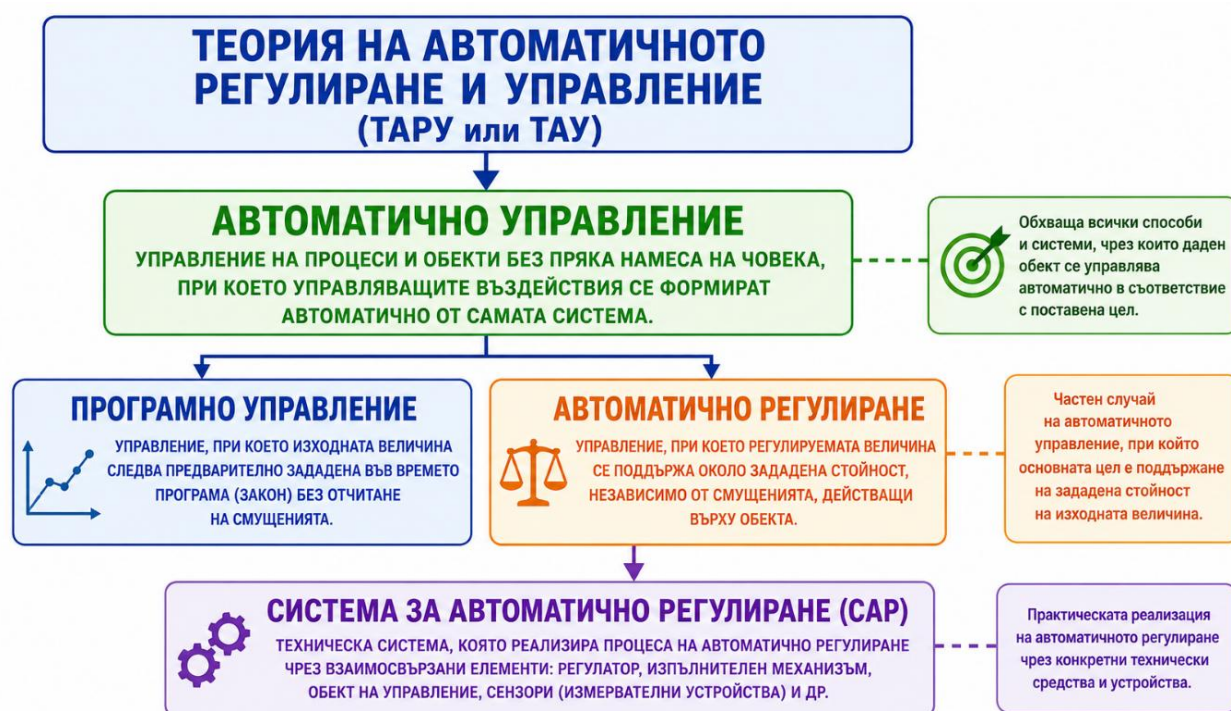
Кибернетичните системи решават по-сложни задачи от автоматичното регулиране. Такива са:

- Екстремално регулиране
- Самонастройка и самоорганизация
- Оптимално функциониране на техническите устройства при променящи се външни условия
- Избор на най-добрите режими на работа на системата за управление и др.

Приложната инженерна дисциплина, която изучава принципите на построяване и методите за проектиране на системи за автоматично управление се нарича **Теория на автоматичното управление (ТАУ)**.

Системите за автоматично регулиране са частен случай на системите за автоматично управление. **Теорията на автоматичното регулиране (ТАР)** е раздел от **теорията на автоматичното управление ТАУ**.

За по-лесното разбиране на взаимовръзката между основните понятия в теорията на автоматичното регулиране и управлението на фиг. 1.3 е представена обобщена схема, която илюстрира тяхната логическа последователност и взаимна обусловеност.



Фиг. 1.3. Логическа взаимовръзка между основните понятия в теорията на автоматичното регулиране и управлението.

1.3. Понятие за автоматично регулиране

Автоматичното регулиране се нарича изменението на някоя физична величина по искан /предварително зададен/ закон без участие на човека. Физичната величина, подлежаща на регулиране се нарича **регулируема величина**, а техническия агрегат, в който се осъществява регулирането – **регулируем обект**.

Автоматичното регулиране е частен случай на Автоматичното управление. Управляемия процес е изменението на регулируемата величина във времето /или във функцията от друга величина/. Целта на управлението е да се осигури искания закон за изменение на регулируемата величина. Този закон може да бъде различен. В много случаи се изисква да се поддържа регулируемата величина на зададеното постоянно ниво /постоянна стойност/. При по-сложните случаи се изисква да се изменя регулируемата величина във времето (или във функцията на друга величина) по зададен по-рано закон. Често искания закон може да бъде предварително неизвестен (случайна функция на времето).

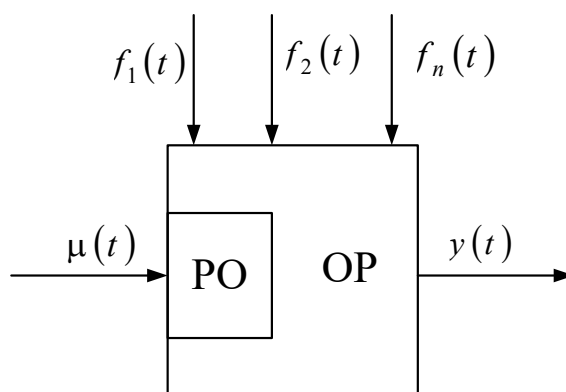
С $y(t)$ - се означава функцията, описваща изменението във времето на регулируемата величина. Нарича се още изходна величина.

С $g(t)$ - се означава функцията, характеризираща искания закон за изменението на регулируемата величина /задаващо въздействие/.

Основната задача на автоматичното регулиране се свежда до осигуряване на равенството:

$$y(t) = g(t) \quad (1.1)$$

В реалните обекти за регулиране винаги съществуват причини отклоняващи регулируемата величина от искания закон за изменение. Тези причини се наричат **смуцаващи въздействия** – **смуцения**. Те се означават с $f_1(t), f_2(t) \dots f_n(t)$.



Фиг. 1.4. Обща схема на обект за регулиране

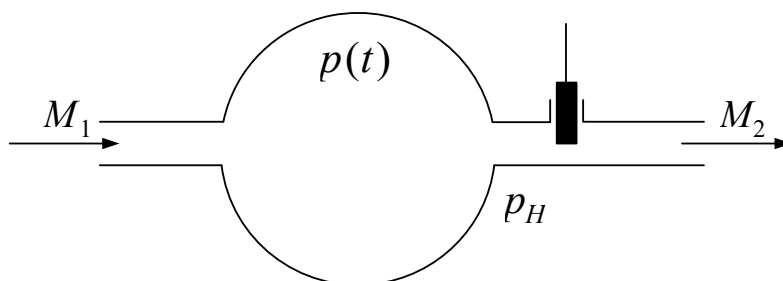
Сред смуценията могат да се отделят едно или няколко, най-силно влияещи върху регулируемата величина. Те се наричат основни, а останалите второстепенни.

За предотвратяване на смущенията, обекта за регулиране ОР има регулиращ /работен/ орган РО, който /ръчно или автоматично/ може да изменя регулируемата величина, като компенсира нежеланите ѝ изменения. Въздействието върху регулиращия орган се нарича регулиращо въздействие $\mu(t)$. Схемата на обект за регулиране е показана на фиг. 1.4.

1.4. Примери за обекти за регулиране

Резервоарът за сгъстен въздух /фиг. 1.5/ се захранва с въздух от компресор и има изпускателен тръбопровод, през който налягането в резервоара се дроселира в околната среда. Такъв ресивер може да бъде, например херметизиран отсек от летателен апарат, предназначен за прибори или хора. Искане се налягането $p(t)$ в резервоара да е постоянно и равно на p_0 . Налягането в този случай е регулируема величина. Искания закон за регулиране е:

$$g(t) = p_0 = \text{const} \quad (1.2)$$



Фиг. 1.5. Ресивер за сгъстен въздух

Смущаващи въздействия, отклоняващи регулируемата величина от зададената стойност могат да са:

- изменение на масовия дебит на компресора M_1 , например вследствие изменението на ъгловата скорост на вала на задвижващия го двигател и режима на работа на другите потребители на сгъстен въздух.
- изменя се външното налягане p_H , а следователно и масовия дебит M_2 .
- Изменението на параметрите на сгъстения въздух, температурата на околната среда и др.

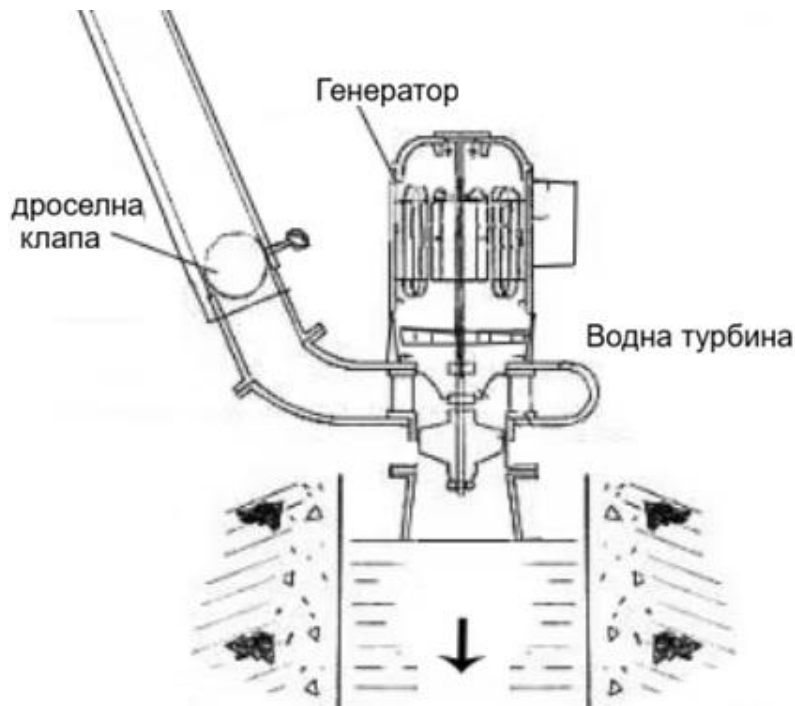
Регулиращия орган е преграда /шибър или регулиращ вентил/ в изходния тръбопровод. Чрез него може да се регулира налягането $p(t)$ и да се компенсира нежеланото отклонение от зададеното значение p_0 . Преместването на преградата е регулиращото въздействие. Ако налягането в отсека е по-голямо от зададената стойност p_0 преградата трябва да се премести нагоре, а при намаляване на налягането – надолу.

Водна турбина

На фиг. 1.6 е показана схема на водна турбина с електрически генератор. Задачата е да се поддържа постоянна ъглова скорост ω на вала на турбината - $\omega_0 = \text{const}$. Регулируемата величина е скоростта на вала ω на хидроагрегата –

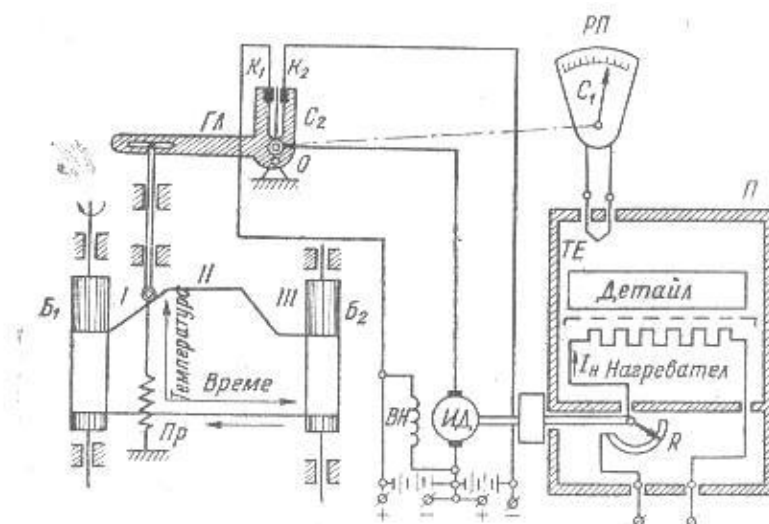
водна турбина и електрически генератор.

Смущение – изменение на съпротивителния момент M_c върху вала на турбината, което се причинява от натоварването на електрическия генератор..
Регулиращо въздействие – преместването на дроселната клапа $\Delta\phi$.



Фиг. 1.6. Схема на водна турбина

Пещ за термична обработка на метали

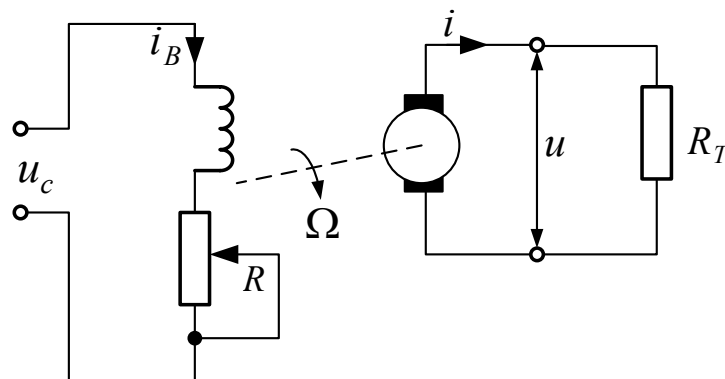


Фиг. 1.7. Система за програмно регулиране на температурата на пещ

На фиг. 1.7 е показана схема на регулиране температурата на пещ за термична обработка на метали. Регулируема величина - температурата на пещта T . Регулиращо въздействие $\Delta\phi$ преместване движенията на реостата.

Смущение – промяна в ел. захранването, външна температура, брой детайли, големина, изолация.

Електрически генератор за постоянен ток с независимо възбуждане



Фиг. 1.8. Електрически генератор за постоянен ток с независимо възбуждане

На фиг. 1.8 е показана схема на електрически генератор за постоянен ток с независимо възбуждане. Възбудителната намотка е свързана към източник с постоянно напрежение u_c . Котвата на електродвигателя се върти с ъглова скорост Ω от двигател. Регулируемата величина е напрежението на клемите на генератора u . За нормална работа е необходимо:

$$u = u_0 = \text{const}$$

Основните смущаващи въздействия, отклоняващи напрежението u от зададеното u_0 са:

- изменение скоростта на въртене на двигателя Ω .
- тока на натоварване i на генератора - зависещ от изменения на съпротивлението на товара R_T .
- Изменение на температурата, влажност и налягането на околното среда, съпротивление в четките на колектора и др.

Регулиращия орган е реостата във веригата на възбудителната намотка. Преместването на реостата е регулиращо въздействие.

При преместването нагоре, напрежението на клемите на генератора u се увеличава, а при преместването надолу - намалява.

ГЛАВА 2

ПРИНЦИПИ НА РЕГУЛИРАНЕ НА СИСТЕМИТЕ ЗА АВТОМАТИЧНО РЕГУЛИРАНЕ

Устройството, автоматично решаващо задачите за регулиране в даден обект се нарича **автоматичен регулатор**. Обекта за регулиране и автоматичния регулатор образуват **система за автоматично регулиране** (САР).

Всеки регулатор е предназначен за създаване регулиращо въздействие $\mu(t)$ върху обекта, осигуряващо изменението на регулируемата величина $y(t)$ по искания закон $g(t)$. Независимо от голямото разнообразие на използваните в съвременната техника регулатори, всички те се базират на един от двата основни принципа на регулиране: по смущение /по външно въздействие/ и по отклонение /грешка/.

2.1. Принцип на регулиране по смущение

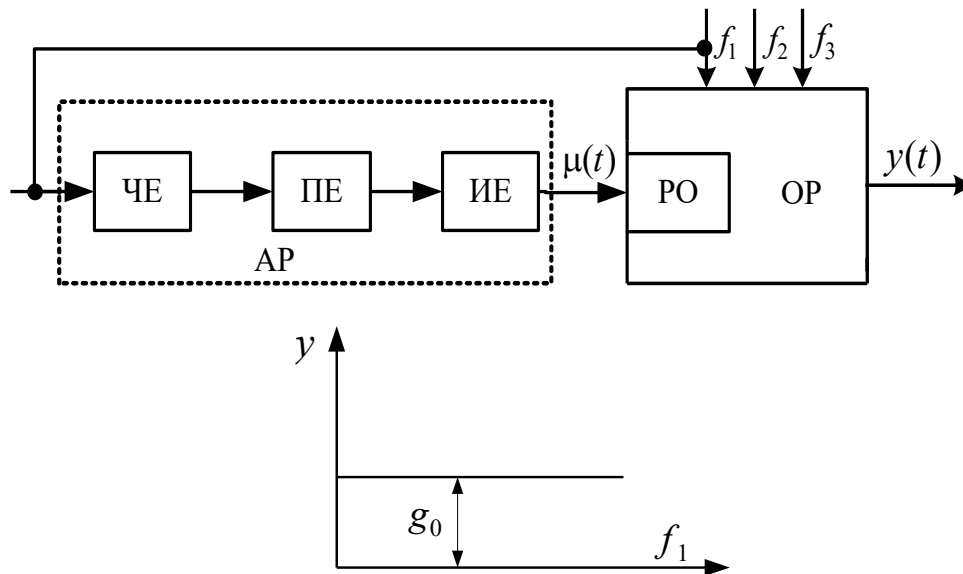
Този принцип е приложен от френският учен Понселе. Той се нарича още принцип на компенсация на смущенията.

Основната причина, отклоняваща регулируемата величина от искания закон за изменение, са смущаващите въздействия. Понселе предлага следната идея: за да се компенсира вредното влияние на смущаващото въздействие то се измерва и в зависимост от резултата от измерването се осъществява регулиращо въздействие на обекта, което осигурява изменението на регулируемата величина по искания закон. Ако смущението предизвиква увеличение на регулируемата величина, то регулатора трябва да създаде управляващо въздействие, така че да се намали регулируемата величина и обратно.

За техническата реализация в структурата на автоматичния регулатор, трябва да влизат устройства които да измерват смущаващото въздействие, и устройствата предназначени за създаване регулиращото въздействие върху, обекта за регулиране (за преместване на регулиращия орган).

Първите се наричат чувствителни елементи – ЧЕ, а вторите – изпълнителни елементи ИЕ. Между чувствителните и изпълнителните елементи могат да се включат промеждутъчни елементи ПЕ, предназначени да усилят изходния сигнал от чувствителния елемент по мощност, като осъществяват необходимите преобразувания на този сигнал.

Функционална схема на САР, която реализира принцип на регулиране по смущение е показана на фиг. 2.1. Регулирането се осъществява по смущението f_1 . Чувствителният, изпълнителният и промеждутъчният елементи образуват автоматичния регулатор /ЧЕ + ПЕ + ИЕ = АР/. Функционалната схема показва от какви елементи се състои системата за регулиране и как тези елементи са свързани помежду си.

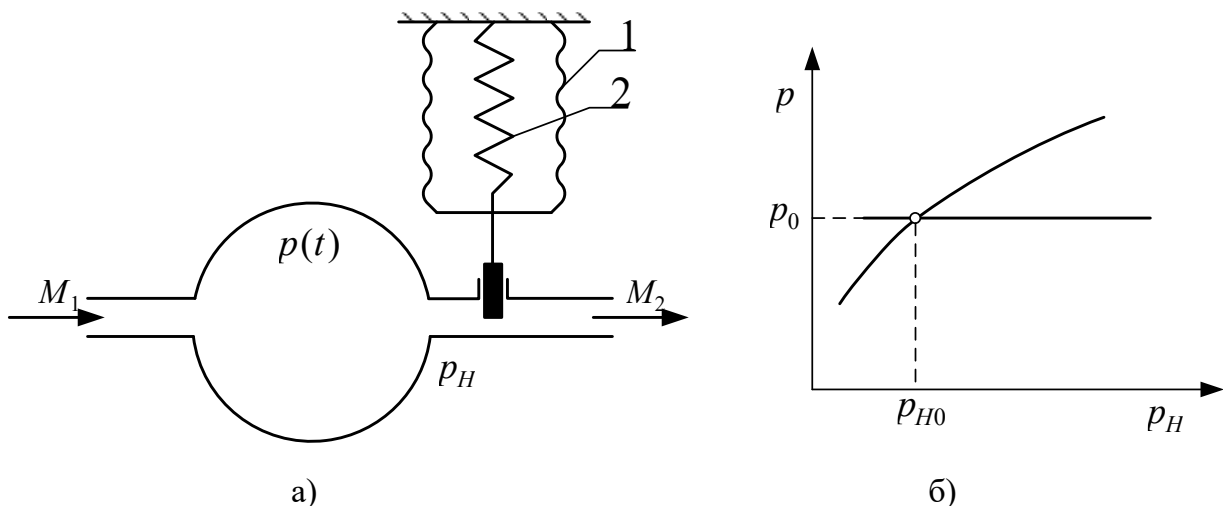


АР – автоматичен регулатор
 ОР + АР = САР

Фиг. 2.1. Функционална схема на система за автоматично регулиране, работеща по смущение

Под елементи на САР се разбира конструктивно обособена част от системата изпълняваща определени самостоятелни функции. На функционалните схеми елементите се изобразяват като правоъгълници, а входните и изходните им величини – във вид на прави линии със стрелки, показващи посоката на предаване на сигналите.

Зависимостта на $y(t)$ от смущението f_1 в установен режим, при отсъствие на други смущения е показана фиг. 2.1, б където g_0 е исканото значение на регулируемата величина. Правилно конструирания регулатор осигурява независимост /инвариантност/ на регулируемата величина от смущението f_1 .



Фиг. 2.2. Регулатор на налягане работещ по смущение

Пример: 2.1

На фиг. 2.2 е показана схема на реализация на принципа на регулиране по смущение при регулиране на налягането в херметизиран отсек. Едно от смущаващите въздействия е зависимостта на налягането в отсека p от налягането на околната среда p_H . Зависимостта е показана с кривата 1 на фиг.1.7, б, като се предполага, че всички други смущаващи въздействия са постоянни. Исканото налягане p_0 се получава само при външно налягане p_{H0} . При $p_0 \neq p_{H0}$ налягането в отсека ще се различава от исканата стойност p_0 . Регулаторът, показан на фиг. 2.2, а позволява да се осигури независимост на регулируемата величина p от p_H . За измерване на смущението p_H се използва силфон 1, в който има вградена пружина 2. Силфонът представлява тънкостенна херметична метална кутия с гофрирани стени, въздухът от която е изтеглен до технически вакуум. Силфонът се деформира в осова посока пропорционално на налягането p_H . Пружината 2 служи за увеличение еластичността на силфона. Регулирания елемент е свързан твърдо със силфона.

Действието на регулатора е следното: предполага се, че налягането p_H нараства. При отсъствие на регулатор това би довело до намаление на дебита M_2 и до увеличение на налягането p . При наличие на регулатор, увеличението на налягането p_H води до свиване на силфона и премества преградата нагоре. Дебита M_2 нараства и налягането в камерата остава p_0 . При намаление на налягането p_H , силфона се разширява и преградата се измества надолу, като намалява дебита M_2 . С помощта на регулатора зависимостта на налягането p от p_H се характеризира с крива 2 на фиг. 2.2, б. Осигурява се независимост /инвариантност/ на p от p_H .

Основни недостатъци на САР, работещи по смущения:

1. Инвариантността се осигурява само по едно от смущенията което се измерва от чувствителния елемент на регулатора. Обикновено се избира едно от основните смущаващи въздействия. Наличието на други смущения, които не се измерват от регулатора водят до отклонението на регулируемата величина от зададено значение, т. е. не се изпълнява задачата /уравнение (1.1)/ на регулирането. Ако се създаде регулатор за всяко от смущаващите въздействия се усложнява много САР. Освен това не всяко смущение е възможно да бъде измерено.
2. Инвариантността по отношение на смущението измерено от чувствителния елемент на регулатора се осигурява при строго съответствие на параметрите на регулатора и обекта с изчислителните им стойности. Изменението на параметрите на регулатора или обекта /вследствие на стареене, влияние на външни условия и др./ води в такива системи до отклонение от исканата стойност.

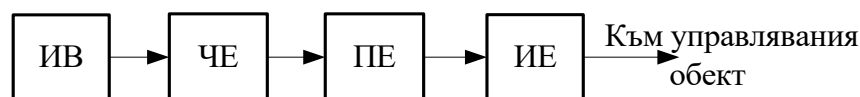
Двата недостатъка на САР работещи по смущение се дължат на това, че в тези системи действителната стойност на регулируемата величина y не се

измерва и не се контролира. Регулиращото въздействие μ не зависи от регулируемата величина y . Системата работи с **отворен цикъл на предаване на въздействието** /от смущението към регулируемата величина/.

Заради недостатъците си този принцип в настояще време не се използва самостоятелно, а само в по-сложните **комбинирани** САР.

Предимство на системите работещи по отворен цикъл е тяхната простота. Те се използват в системи за автоматична сигнализация, контрол, блокировка и защита. Използват се и в някои електрохидравлични и електропневматични елементи:

Обща схема на автоматична система, работеща по отворен цикъл е показана на фиг. 2.3, където източника на въздействие ИВ може да е изменение на външни условия, човек или автоматично устройство.



Фиг. 2.3. Функционална схема на автоматична система, работеща по отворен цикъл

2.2. Принцип на регулиране по отклонение (грешка)

Този принцип е използван в регулаторите на Ползунов и Уат. Основна задача на всяка САР е да се изпълнява равенството $y(t) = g(t)$.

Колкото по-точно се изпълнява равенството толкова САР е по-добра. Качеството на работата на САР се дава с равенството:

$$x(t) = g(t) - y(t) \quad (2.1)$$

където,

$x(t)$ - грешка на работата на САР, колкото по-малка е грешката $x(t)$ толкова е по-добра системата.

За идеална САР грешката трябва да е нула за всички моменти от време

$$x(t) = 0. \quad (2.2)$$

За реалните системи грешката е различна от нула и може да се говори само за намаляването ѝ до допустими граници.

В случая когато искания закон за регулиране е постоянна величина $g(t) = g_0 = const$, за оценка качеството на работа на САР се използва понятието отклонение $\Delta y(t)$:

$$\Delta y(t) = y(t) - g_0. \quad (2.3)$$

Грешката и отклонението се отличават само по знак. При по-сложни закони за изменение на задаващото въздействие отклонението се използва като критерий за качеството на САР.

Идеята лежаща в основата на принципа на отклонение е следната. По някакъв начин се определя грешката на САР - $x(t)$ и в зависимост от

големината и знака на тази грешка се осъществява регулиращо въздействие върху обекта, свеждащо грешката към стойности близки до нула.

При $x(t) > 0$ - регулиращото въздействие трябва да увеличава регулируемата величина $y(t)$.

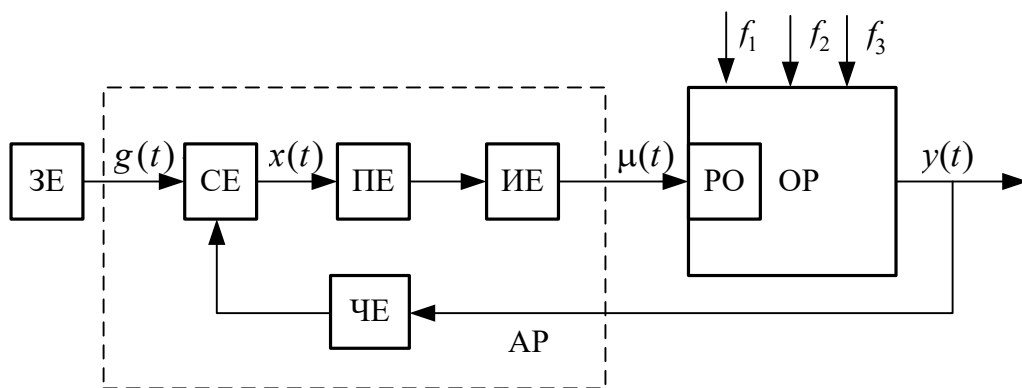
При $x(t) < 0$ - регулиращото въздействие трябва да намалява регулируемата величина $y(t)$.

При $x(t) = 0$ - регулиращия орган трябва да е неподвижен.

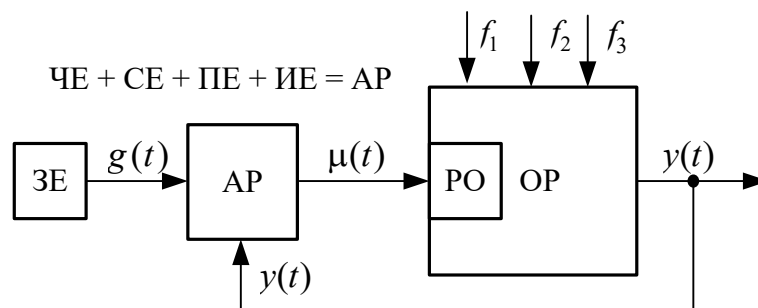
За определяне сигнала на грешката $x(t)$ се използват три елемента: задаващ, чувствителен и сравняващ:

- Задаващ елемент ЗЕ – служи за формиране на задаващото въздействие $g(t)$, характеризиращо искания закон за изменение на регулируемата величина. В случай когато $g(t) = g_0 = const$, конструкцията на ЗЕ е проста и представлява орган за настройка на САР, позволяващ с една система да се поддържат различни постоянни стойности на регулируемата величина.
- Чувствителния елемент ЧЕ – е предназначен за измерване на действителните стойности на регулируемата величина $y(t)$.
- Сравняващия елемент СЕ – представлява просто изчислително устройство определящо грешката $x(t)$ по формулата:

$$x(t) = g(t) - y(t)$$



а)



б)

Фиг. 2.4. Функционална схема на САР работеща по грешка

При конкретно изпълнение на САР, работещи по грешка ЗЕ, СЕ и ЧЕ често конструктивно се обединяват.

Функционалната схема на САР работеща по грешка /фиг. 2.3, а/. В тази схема регулируемата величина $y(t)$ се измерва с чувствителен елемент ЧЕ и се подава на входа на сравняващия елемент СЕ. На другия вход на сравняващия елемент постъпва задаващото въздействие $g(t)$, изработено в задаващия елемент ЗЕ. На изхода на сравняващия елемент се формира сигнала на грешката $x(t)$, характеризиращ разликата от действителния $y(t)$ и искания $g(t)$ закон за изменение на изходната величина. След преобразуване в промеждутъчния елемент ПЕ сигнала за грешката постъпва в изпълнителния елемент ИЕ, преместващ регулиращия орган РО по такъв начин, че да са сведе сигнала за грешката към нула. Чувствителния, промеждутъчния и изпълнителния елементи образуват автоматичния регулатор АР.

Промеждутъчните елементи ПЕ включват устройства за преобразуване физическата природа на сигнала на грешката (модулатори, демодулатори и др.), устройства за усилване на сигнала по мощност (усилватели) и коригиращи устройства осъществяващи функционално преобразуване на сигнала на грешката (интегриране, диференциране и др.) и предназначени да предават на САР определени свойства.

На фиг. 2.4, б схемата от 2.4 а е показана с обобщени блокове. Тази схема нагледно показва, че САР работеща по грешка се състои от взаимно свързани автоматичен регулатор АР и обект за регулиране ОР. На входа на регулатора постъпва задаващото въздействие $g(t)$ и регулируемата величина $y(t)$. Изходната величина на регулатора се регулиращото въздействие $\mu(t)$, приложено към регулиращия орган. Смущаващите въздействия $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ и задаващото въздействие $g(t)$ - често се обединяват с термина **външни въздействия**.

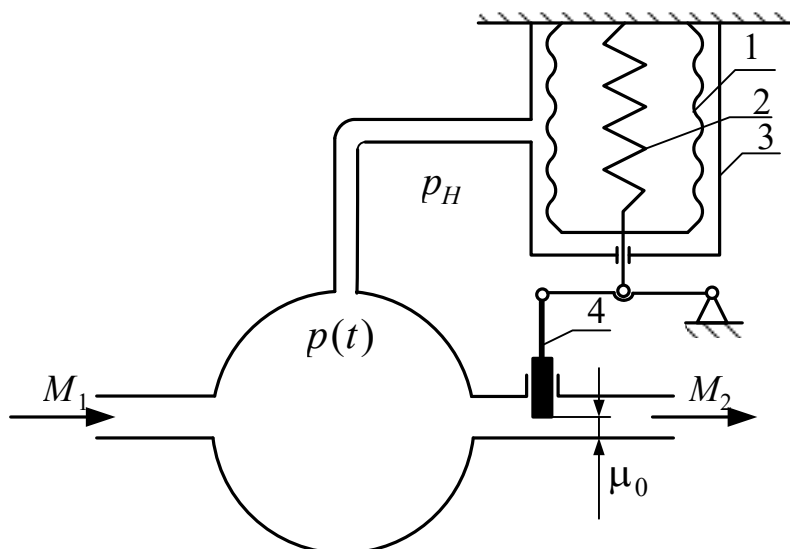
Примери:

САР за постоянно налягане в херметизирана камера:

На фиг. 2.5 е показана САР за налягане, предназначена за поддържане на постоянно налягане $p = p_0$ в херметизиран отсек. Чувствителния елемент е силфонов измервател на налягането (силфон 1 и пружина 2), поместени в камера 3, налягането което е равно на налягането в камерата p . Силфона е кинематично свързан с регулиращия орган, вследствие на което преместването на регулируемата преграда 4 зависи от налягането в херметизирания отсек.

При установен режим на работа на САР, характерен с постоянни стойности на всички смущения, налягането в камерата е постоянно. Преградата 4 заема точно определено значение, тъй като силата действаща в силфона породена от налягането в камера 3, и се уравновесява от силата на пружината 2. Предполага

се, че изобразеното на фиг. 2.5 положение на силфона 1 и преградата 4 съответства на исканото значение на налягането $p = p_0$.



Фиг. 2. 5. САР за налягане работеща по грешка

Ако по някаква причина налягането в камера 3 нараства, силфона се свива и премества преградата 4 нагоре. Увеличава се разхода на въздух M_2 , което води до намаляване на налягането в камерата. Аналогично при намаляване на налягането p под p_0 , силфона се разтяга, преградата 4 се премества надолу и M_2 се намалява.

В разгледания пример регулатора не съдържа задаващ, промеждутъчен и изпълнителен елементи. Сигнала на грешката се определя по:

$$x(t) = p_0 - p(t). \quad (2.4)$$

Величината μ определя отварянето на преградата 4, отчитано от положението в което изпускателния тръбопровод е напълно затворен. Преградата е свързана твърдо със силфона и големината на μ зависи от налягането в камерата p . В номиналния /установен/ отварянето на регулиращия орган има точно определена стойност $\mu = \mu_0$.

За произволно изменение на налягането p е в сила в установен режим.

$$\mu(t) = \mu_0 - \kappa [p(t) - p_0] \quad (2.5)$$

Където κ - коефициент зависещ от еластичните свойства на силфона и пружината.

Означава се с $\Delta\mu(t) = \mu(t) - \mu_0$ и $\Delta p(t) = (p(t) - p_0)$ отклоненията на величините $\mu(t)$ и $p(t)$ от установените им стойности μ_0 и p_0 .

Уравнението добива вида

$$\mu(t) - \mu_0 = -\kappa [p(t) - p_0] \Rightarrow \Delta\mu(t) = -\kappa \Delta p(t) \quad (2.6)$$

Като се отчете, че $\Delta p = \Delta y = -x(t)$ окончателно се получава

$$\Rightarrow \Delta u(t) = k x(t) \quad (2.7)$$

В разглеждания случай на САР сигнала на грешката $x(t)$ е пропорционален на отклонението на регулирания орган от положението в номиналния режим на работа.

Изходната величина на чувствителния елемент /деформацията на силфона 1/ е пропорционална на регулираната величина /на налягането p /. Сравняващ елемент в явен вид отсъства. Сигнала на грешката се оказва пропорционален на отклонението на изходната величина на чувствителния елемент от неговата стойност в номинален режим на работата на САР. Такъв принцип за определяне на сигнала на грешката се използва често в САР, за поддържане на постоянни стойности на регулируемата величина.

Зависимостта на регулиращото въздействие от сигнала на грешката, без отчитане на инерционните свойства на регулатора се нарича **закон за регулиране**. Уравнението $\Rightarrow \Delta u(t) = k x(t)$ представлява най-елементарния закон за регулиране – **пропорционален закон за регулиране**.

Основното предимство на САР работещи по грешка, пред САР по смущение е тяхната способност да изпълняват задачата за регулиране при произволен брой смущения. Работата на системата по грешка не свързана с конкретно смущаващо въздействие, измерва се изходната величина и грешката. В случаите когато $\Rightarrow x(t) \neq 0$, регулатора създава регулиращо въздействие върху обекта, намаляващо грешката до нула. При регулирането по грешка не се интересуваме от това, колко и какви смущения действат върху системата, регистрира се само факта за поява на грешката и се предприемат мерки за ликвидирането ѝ.

Второто преимущество на САР по грешка е отсъствието на твърди изисквания за стабилност на характеристиките на елементите на регулатора и обекта. Това се обяснява с това, че при изменение на параметрите на регулатора или обекта се появява грешка, която се обработва в системата и ликвидира чрез съответното преместване на регулиращия орган. Това преимущество на САР по грешка, не се отнася до чувствителния, сравняващия и задаващия елемент на регулатора, взимащи участие при определяне на сигнала за грешката $x(t)$. Към стабилността на характеристиките на тези елементи има твърди изисквания защото точността на работа на САР се определя преди всичко от точността, с която се измерва сигнала за грешката.

САР работещи по грешка, преодоляват основните недостатъци на САР по смущение. Това обстоятелства е причина, за това че **принципът на регулиране по отклонение /грешка/ е основен принцип на построяване на автоматични регулатори в различните области на техниката**.

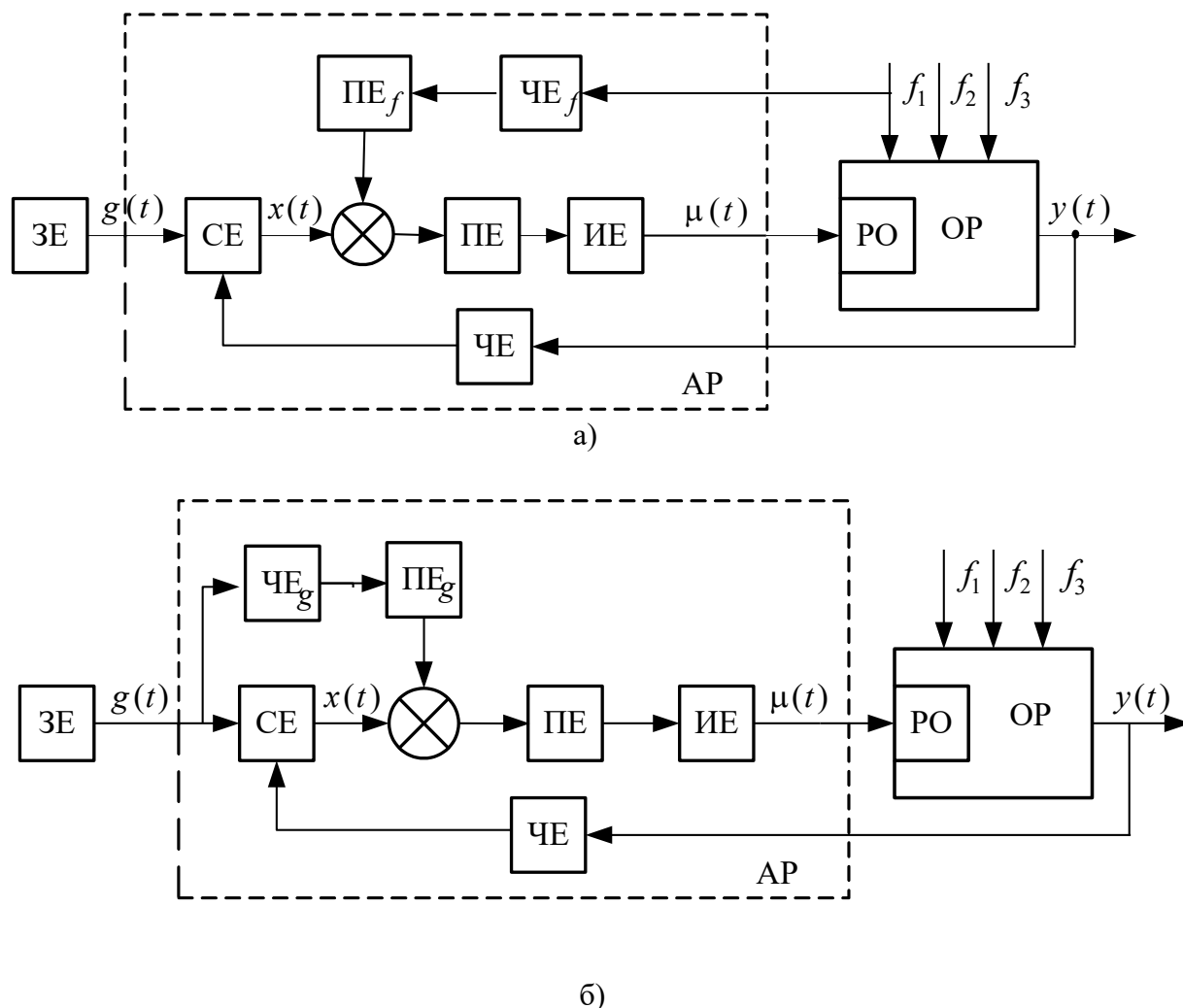
Преимствата на САР по грешка се обясняват с това, че това са системи работещи с **обратна връзка**. Под **обратна връзка** се разбира подаване на сигнала от изхода на устройството към входа му. В случая когато сигналът от обратната връзка се събира с входния сигнал обратната връзка е

положителна, когато се изважда – отрицателна. **САР работещи по грешка са системи с отрицателна обратна връзка.**

Наличието на обратна връзка в САР води до образуването на затворен контур на предаване на връзката. Регулатора въздейства на обекта, обекта на регулатора. За това САР по грешка се наричат **системи работещи по затворен цикъл**, или просто **затворени системи**.

Системите с обратна връзка или затворените системи са широко разпространени в техниката. В живата природа също различните системи работят с обратна връзка (регулиране на кръвно налягане, температура на тялото и т.н.).

Принципът на обратната връзка е един от основните принципи на регулиране и управление в техниката, така и в живите организми.



Фиг. 1. 22. Функционална схема на комбинирани САР

а) - Комбинирана система по смущение

б) Комбинирана система по задаващо въздействие.

Недостатъци на САР по грешка:

1. Принципът на регулиране по грешка е вътрешно противоречив. За да съществува регулиране трябва да съществува грешка $x(t) \neq 0$, т. е. преди да се ликвидира грешката е необходимо да се допусне нейното възникване.
2. Затворените системи са сложни и трудни за пресмятане, и са склонни към колебание.

Системите в които се използват едновременно регулиране по грешка и по смущение, се наричат **комбинирани системи за регулиране**.

Такива системи /фиг. 2.6, а/ обикновено представляват съчетание на две системи, едната работи по отворен, а другата по затворен цикъл. Системата работеща по отворен цикъл осигурява инвариантност на регулируемата величина по отношение на едно от основните смущения, най-силно влияещи върху регулируемата величина. Системата работеща по затворен цикъл, ликвидираща влиянието на другите смущения.

Промеждутъчния и изпълнителния елемент в двете системи обикновено са общи.

Системите с комбинирано регулиране са най-съвършените типове САР. Те се използват най-често при повишени изисквания за точност в работата на САР. Разбира се, за използване на комбинирани САР поне едно от основните смущаващи въздействие трябва да може да се измери.

В случая, когато искания закон за изменение на регулируемата величина $g(t)$ представлява сложна функция на времето, често се използват комбинирани САР, в които регулирането по отворен цикъл осъществява не по смущаващо, а по задаващо въздействие – фиг. 2.6, б. Целта на това регулиране е да се застави регулируемата величина $y(t)$ да се изменя по закона $g(t)$. Вредното влияние на смущаващите въздействия се компенсира от система, работеща по затворен цикъл.

ГЛАВА 3

КЛАСИФИКАЦИЯ НА САР СПОРЕД ФУНКЦИОНАЛНОТО ИМ ДЕЙСТВИЕ

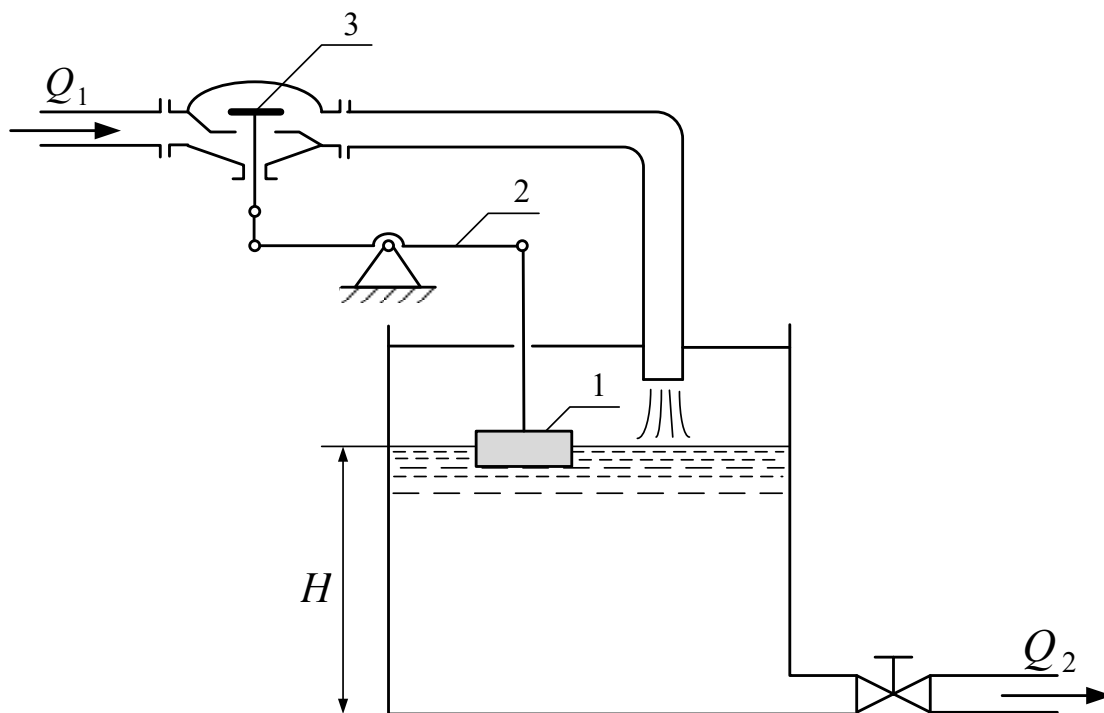
3.1. Класификация според допълнителния източник на енергия

В зависимост от наличието на допълнителен източник на енергия САР се делят на системи с пряко или непряко регулиране.

Системи с пряко /директно/ регулиране – регулиращия орган се премества непосредствено от чувствителния елемент. Допълнителни източници на енергия отсъстват, всичката енергия необходима за преместване на регулиращия орган се дава от чувствителния елемент.

Прякото регулиране се отличава с простота. Промеждутъчен и изпълнителен елемент отсъстват. Точността обаче е не голяма. Областта им на използване е само за обекти с малка мощност, в които преместването на регулиращия орган не изисква значителни усилия.

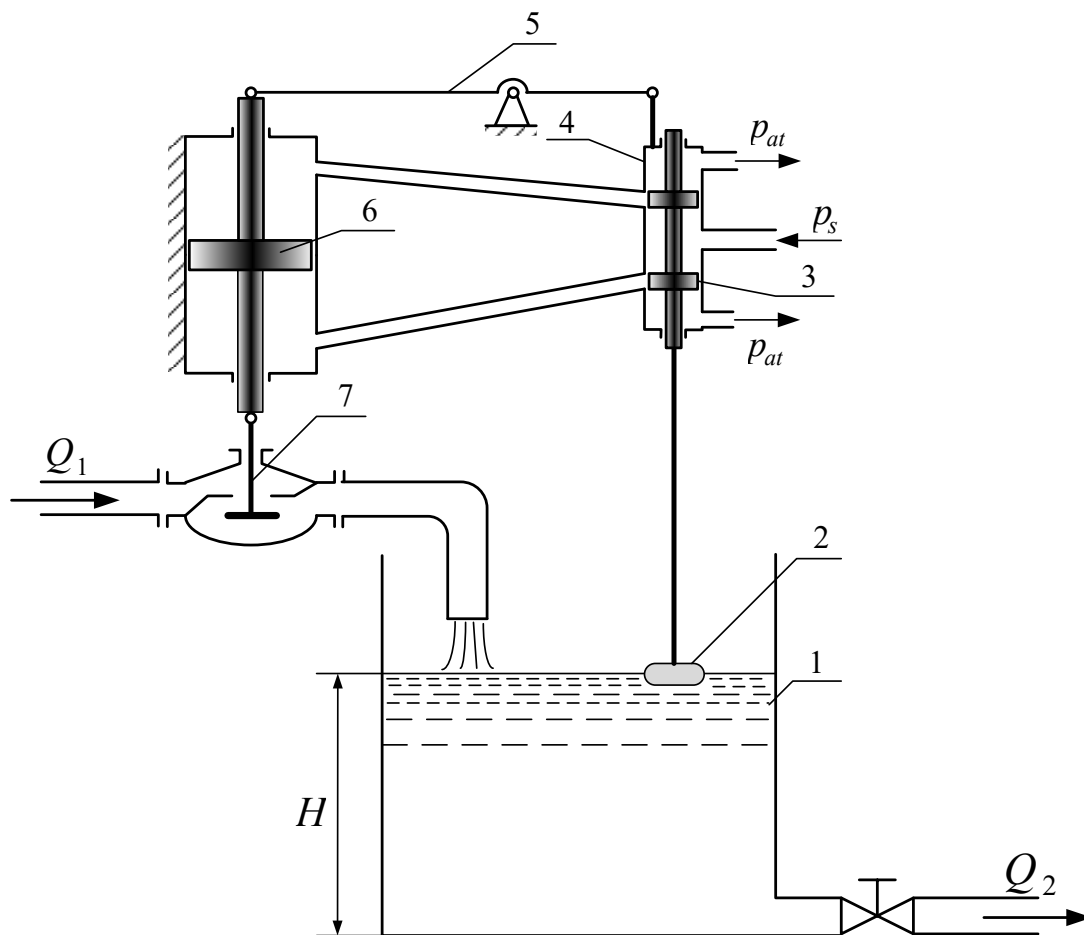
На фиг. 3.1 е показана система за регулиране на ниво с пряко действие, работеща на принципа на регулиране по грешка. Чувствителния елемент – поплавъкът 1, с помощта на кобилицата 2 задвижва директно регулиращия орган 3. При увеличаване нивото в съда поплавъкът се повдига нагоре намалява проходното сечение на клапана дотогава, докато не се установи равновесие между притока Q_1 и разхода на течността Q_2 . При спадане на нивото се увеличава отварянето на регулиращия орган. На всеки дебит от течността при установен режим отговаря на определено отваряне на клапана 3 височина на нивото в резервоара H .



Фиг. 3.1. Схема на система за регулиране на ниво с директно действие

б) Системи с непряко (индиректно) регулиране – в състава им влизат устройства позволяващи да се усили сигнала на грешката по мощност. Това са специалните усилватели (пневматични, хидравлични, електрически). Наличието на усилването по мощност е основен отличителен признак. Това става чрез допълнително въвеждане на енергия от допълнителните източници, захранващи усилвателите и изпълнителните елементи. В резултат сигнала от грешката само управлява предаването на енергия от допълнителния източник към регулиращия орган. За това тези САР използват високо чувствителни и точни ЧЕ за управление на обекти с по – голяма мощност. В резултат се получават по точни системи, и съвременните САР са с пределно индиректно регулиране.

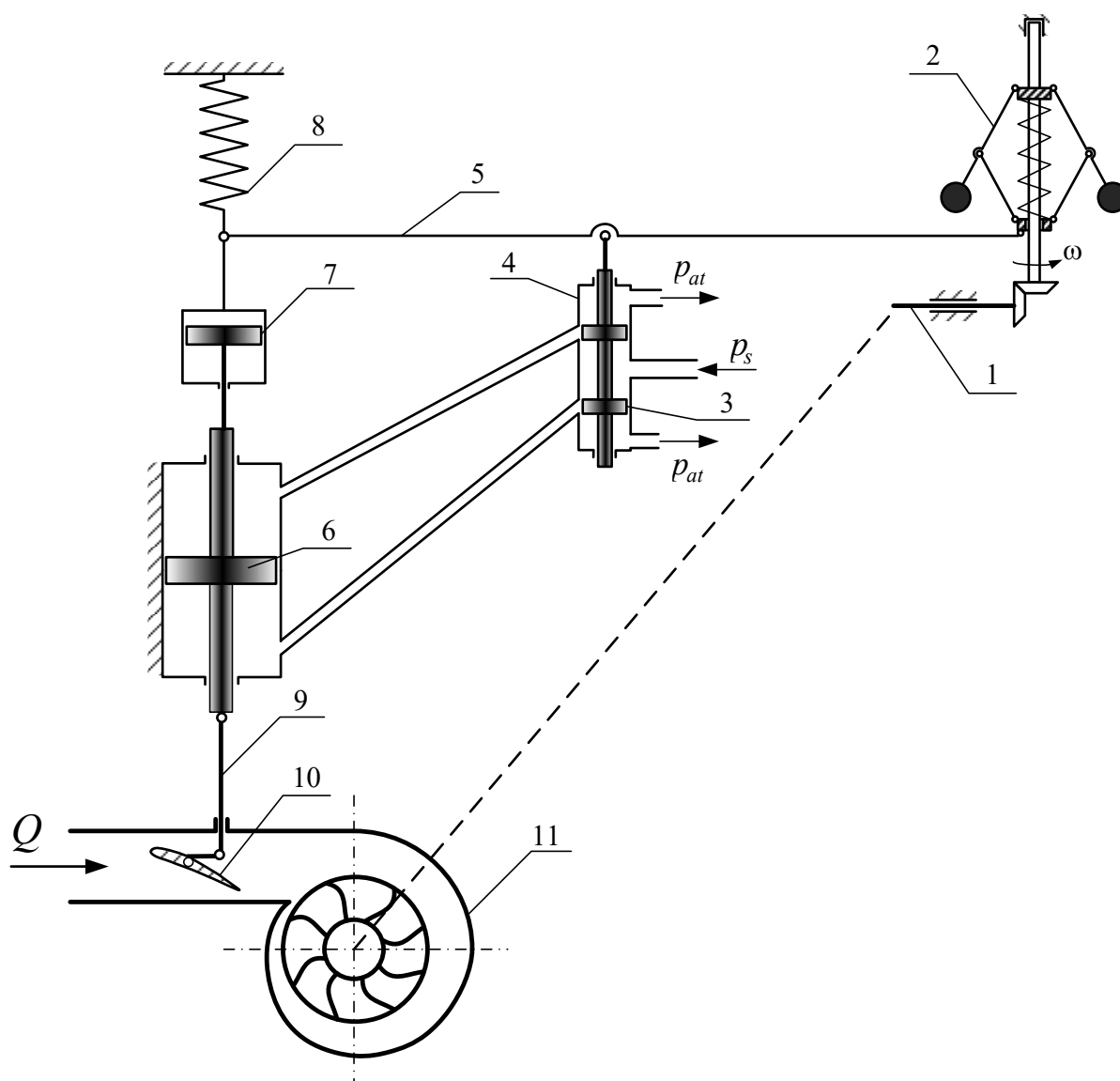
На фиг. 3.2 е показана система за регулиране на ниво с индиректно регулиране. Чувствителния елемент – поплавък 2, задвижва плунжера на хидравличен разпределител 3, чрез който се управлява буталото на хидравличния цилиндър 6, играещ ролята на изпълнителен механизъм.



Фиг. 3.2. Схема на система за регулиране на ниво с индиректно действие

При увеличаването на нивото на течността в резервоара 1 разпределителя се премества нагоре, като свързва маслото под налягане от захранващата система с пространството над буталото 6, а долното пространство с атмосферната. Вследствие на създадената разлика от налягане буталото 6 се премества надолу и притваря регулиращия орган 7 до изравняване на дебитите Q_1 и Q_2 . При

движението на буталото 6 надолу посредством кобилицата 5 /местна обратна връзка/ се повдига нагоре тялото на разпределителя 4, при което се създава компенсация на първоначалното но проточното сечение от разпределителя 3. При понижаване на нивото на течността в резервоара процесът на регулиране протича в обратен ред.



Фиг. 3.3 Схема на система за индиректно регулиране скоростта на водна турбина:

На фигура 3.3 е показана схема за непряко /индиректно регулиране скоростта на водна турбина 11. Чувствителния елемент е центростремо махало 2 свързано с вала на водната турбина. При изменение на скоростта на въртене на вала махалото изменя своето положение, като премества плунжера 3 на хидравличния разпределител 4. Разпределителя управлява хидроцилиндъра 6, който премества регулиращата лопатка 10 чрез която се контролира дебита на постъпващата в турбината вода. Допълнителна обратна връзка се реализира с лоста 5. Пружината заедно с демпфериращото бутало 7 образува така нареченото изодромно устройство.

3.2. Класификация според искания закон за изменение на регулируемата величина

В зависимост от искания закон $g(t)$ за изменение на регулируемата величина $g(t)$ САР се делят на:

- системи за стабилизация
- системи с програмно регулиране
- следящи системи

а) Системи за стабилизация – за поддържане на постоянна стойност на регулируемата величина $y(t)$. В тези системи задаващото въздействие $g(t) = g_0 = const$. Примери:

- системи за стабилизация на налягането
- скорост на въртене и т.н.

При тях задаващия елемент в явен вид отсъства, той представлява просто елемент на настройка, който позволява да се променя постоянната стойност g_0 , около която се стабилизира регулируемата величина.

б) Системи за програмно регулиране – предназначени са да изменят регулируемата величина $y(t)$ по известен закон във функция на времето или някоя друга величина. В тези системи задаващото въздействие е предварително известна функция на времето:

$$g(t) = g_0(t) \quad (3.1)$$

или на друга величина z

$$g = g_0(z), \quad (3.2)$$

и се нарича програма на регулирането.

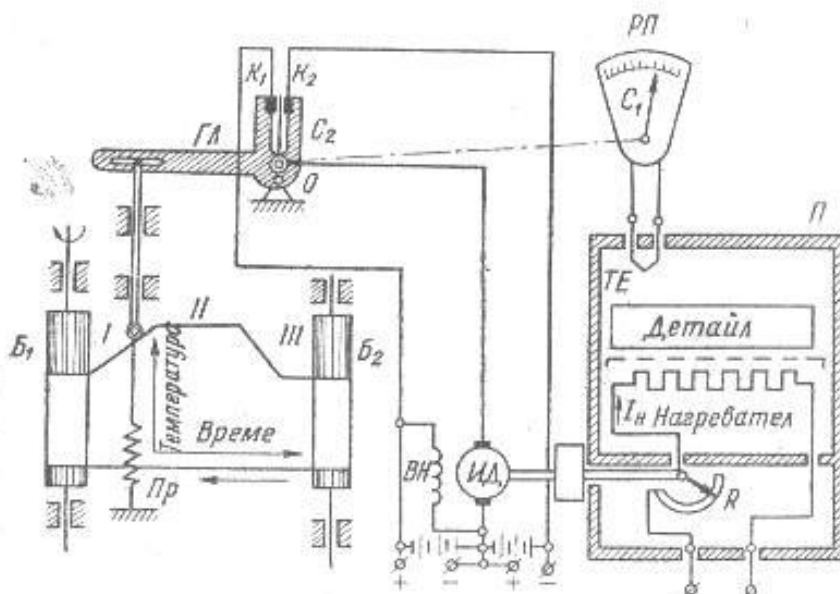
Програмата от вида (3.1) е времева програма, програмата от вида (3.2) – параметрична програма. Параметричните програми могат да зависят не само от една, а от няколко величини.

Параметричните програми се използват в металоурежещите машини с програмно управление, предназначени за обработка на детайли със сложна форма /гребни винтове, лопатки на турбини и др./

Система за регулиране температурата на пещ за термична обработка на метални детайли.

Топлината за нагряване на детайлите D се получават от електрически нагревател H . Чрез регулиращия реотан R се изменя тока I_n през нагревателя. Посредством термодвойката $TД$ се изследва регулируемата величина – температурата T° . На регулиращия прибор $РП$ се подава напрежение, което е пропорционално на температурата. Стрелката C_1 е на една ос със стрелката C_2 която е поместена в изреза на един лост - L , между два контакта κ_1 и κ_2 . Тези контакти са свързани с полюсите на захранващия източник, а стрелката C_2 е

свързана с котвата на изпълнителния двигател *ИД* и е изолирана електрически от лоста



Фиг. 3.4. Система за програмно регулиране на температурата на пещ

Задаващото устройство се състои от два барабана между които се развива профилна диаграма. Барабанът B_1 е водещ и се завърта от часовников механизъм *ЧМ*. По диаграмата се плъзга ролка и завърта лоста *Л* по часовниковата стрелка – участък I – увеличава зададената температура. Стрелата C_2 се допира до контакт κ_1 и на двигателя *ИД* се подава напрежение с положителна полярност, и се завърта ръчката на реостата *R*, като се увеличава тика I_n , и в пещта постъпва по – голямо количество топлина. Обратната връзка се осъществява с помощта на *ТД* – *РП* – C_1 – C_2 . Когато трябва да се поддържа постоянна температура C_2 е в средно положение и двигателят е изключен. При налягане на T° лоста се завърта обратно на часовниковата стрелка и C_2 допира κ_2 , свързва *ИД* с отрицателния полюс и реостата се завърта в обратна посока.

Задаващите елементи са по – сложни от системите за стабилизация

в) Следящи системи – за изменение на регулируемата величина $y(t)$ по закон който не е известен по-рано. В тези системи задаващото въздействие $g(t)$ е случайна функция на времето.

Пример за следяща система за автоматично управление — система, която следи зададена стойност и автоматично коригира поведението си, за да я поддържа.

Как работи системата Автопилот на автомобил (поддържане на скорост) – фиг. 3.4:

Шофьорът задава желана скорост, например 90 km/h.

Системата непрекъснато:

- измерва текущата скорост;
- сравнява я със зададената;

- изчислява грешката;
- подава команда към двигателя.



Фиг. 3.4. Автопилот на автомобил (поддържане на скорост)

Ако автомобилът започне да се движи по-бавно при изкачване, системата автоматично увеличава подаването на гориво. Ако скоростта стане по-висока — намалява мощността.

Основни елементи на следящата система

1. Задаващо устройство - въвежда желаната стойност- 90 km/h.
2. Датчик- измерва реалната скорост.
3. Сравняващо звено - определя разликата между зададената скорост и реалната скорост.
4. Регулатор - изчислява необходимата корекция.
5. Изпълнителен механизъм - променя подаването към двигателя.

Други примери за следящи системи

- термостат на отопление;
- система за насочване на ракета;
- роботизирана ръка;
- управление на нивото на вода в резервоар;
- стабилизация на дрон.

3.3. Статични и астатични системи.

Качеството на САР се оценява с грешката.

$$x(t) = g(t) - y(t) \quad (3.3)$$

Границата към която се стреми грешката с течение на времето, се нарича установена грешка на САР:

$$x_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(\bar{t}) \quad (3.4)$$

В случая когато всички външни въздействия /задаващи и смущаващи/ с течение на времето се стремят към постоянни стойности, установената грешка се нарича статична:

$$x_{cm} = x_{c.e} + x_g + x_{f_1} + x_{f_2} + \dots \quad (3.5)$$

където,

x_{ce} - грешка в работата на сравняващия елемент;

x_g - статична грешка на възпроизвеждане на задаващото въздействие.

САР се нарича *статична* (или притежаваща статизъм) по дадено външно въздействие, ако съставляващата на статичната грешка обусловена от това въздействие е различна от нула.

$x_g \neq 0$ - САР е статична по отношение на задаващото въздействие

$x_{f_1} \neq 0$ - САР е статична по отношение на f_1 .

САР се нарича *астатична* (или притежаваща астатизъм) по дадено външно въздействие, ако съставляващата на статичната грешка обусловена от това въздействие е равна на нула.

$x_g = 0$ - САР е астатична по отношение на задаващото въздействие

$x_{f_2} = 0$ - САР е астатична по отношение на f_2 .

В добре пресметната САР статичната грешка може да бъде много малка, и по малка от колкото без регулатор.

В астатичните САР относно някое въздействие, зависимостта на регулируемата величина от това въздействие е крива.

Астатичните системи не са съвсем без грешка. Даже и в случая когато има астатизъм по всички външни въздействия се вижда, че:

$$x_{cm} = x_{ce} \neq 0 \quad (3.6)$$

При повишени изисквания към точността, се отдава предпочитание към астатичните системи. В следящите системи се осигурява астатизъм по отношение на задаващото въздействие, т. е. $x_g = 0$.

ГЛАВА 4

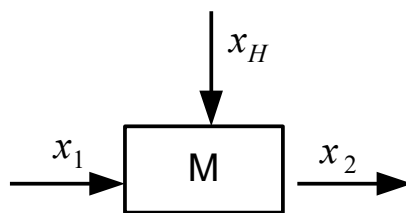
НЕПРЕКЪСНАТИ (АНАЛОГОВИ) И ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

4.1. Понятие за квантоване на системите.

Работата на всяка система за регулиране, се състои от предаване на сигналите от един елемент на системата към друг и преобразуването на тези сигнали от елементите на САР.

Предаването на сигналите се осъществява с помощта на модулация, под която се разбира изменение на някои от параметрите на приносителя на съобщението по закон, определен от предавания сигнал. Устройството осъществяващо модулацията се нарича модулатор – фиг. 4.1.

Обикновено модулатора има два входа, на единия се подава подлежащия на модулиране сигнал x_1 , а на другия вход се подава опорния или носещия сигнал x_H , който играе ролята на приносител на информацията съдържаща се в сигнала x_1 .



Фиг. 4.1. Условно изображение на модулатор

Исходният сигнал от модулатора е:

$$x_2 = x_2(x_1, x_H), \quad (4.1)$$

където x_2 - е функция от входните сигнали, вида на които зависи от типа на модулатора.

В зависимост от характера на носещия сигнал x_H и функцията (4.1) се различават непрекъснатата и дискретна модулация.

Модулацията се нарича непрекъснатата, когато носещия сигнал $x_H(t)$ е непрекъснатата функция във времето и (4.11) е непрекъснатата и по двата си аргумента.

Дискретна се нарича модулацията когато $x_H(t)$ е дискретна функция на времето и (или) функцията (4.1) е дискретна по аргумента x_1 .

4.2. Системи с непрекъснатата модулация

Системи с непрекъснатата модулация се наричат непрекъснати (аналогови) системи. Те се състоят от непрекъснати елементи, в които при непрекъснато изменение входния сигнал непрекъснато се изменя и изходния сигнал.

В непрекъснатите системи в качеството на носещ сигнал се използва или постоянен, или хармонично изменящ се сигнал

$$x_H(t) = \text{const} \quad (4.2)$$

$$x_H(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.3)$$

където,

A - амплитуда на сигнала;

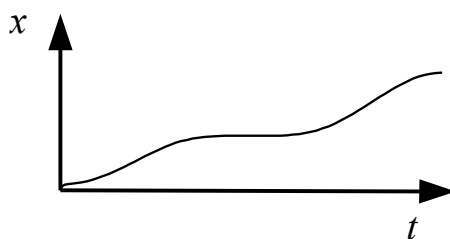
ω - кръгова честота;

φ - начална фаза на опорния сигнал.

Всеки от тези три параметъра може да се използва за предаване на входния сигнал на модулатора x_1 .

В случая когато амплитудата на колебанията $A = A(x_1)$ са функция на входния сигнал се получава амплитудна модулация. При $\omega = \omega(x_1)$ и $\varphi = \varphi(x_1)$ се говори за честотна и съответно фазова модулация.

1. Непрекъснатата система с постоянен сигнал:



Фиг. 4.2. Непрекъснатата система с постоянен сигнал

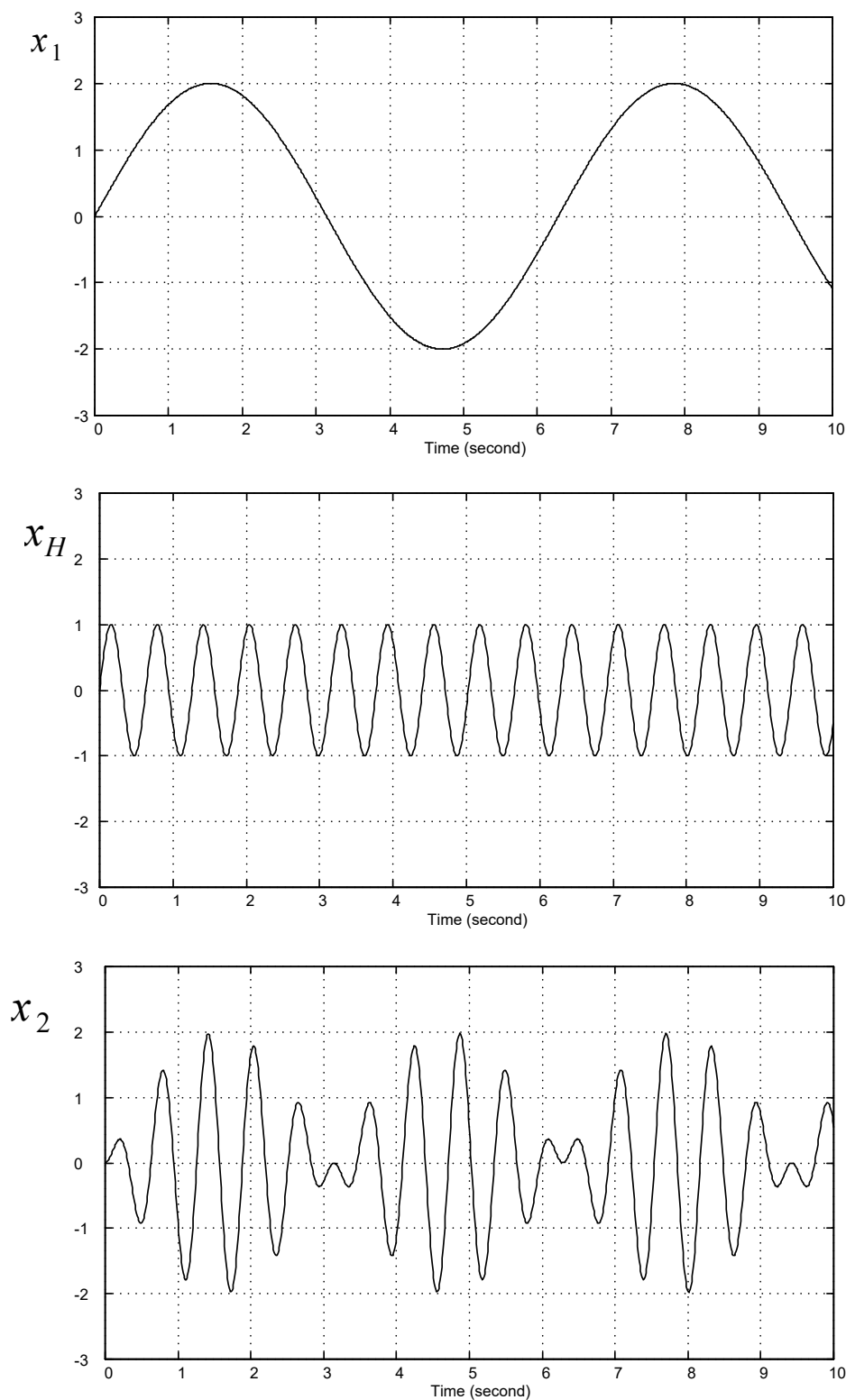
2. С амплитудна модулация.

$$x_2(t) = x_1(t) \cdot x_H(t) = x_1 A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.1)$$

Изходният сигнал от модулатора е хармоничен с честота ω , амплитудата е пропорционална на входния сигнал x_1 , а фазата се изменя на 180° при изменение на знака на входния сигнал.

Преимущество на системите с амплитудна модулация пред тези с постоянна е по-голямата им стабилност при работа: по – голяма стабилност при работа

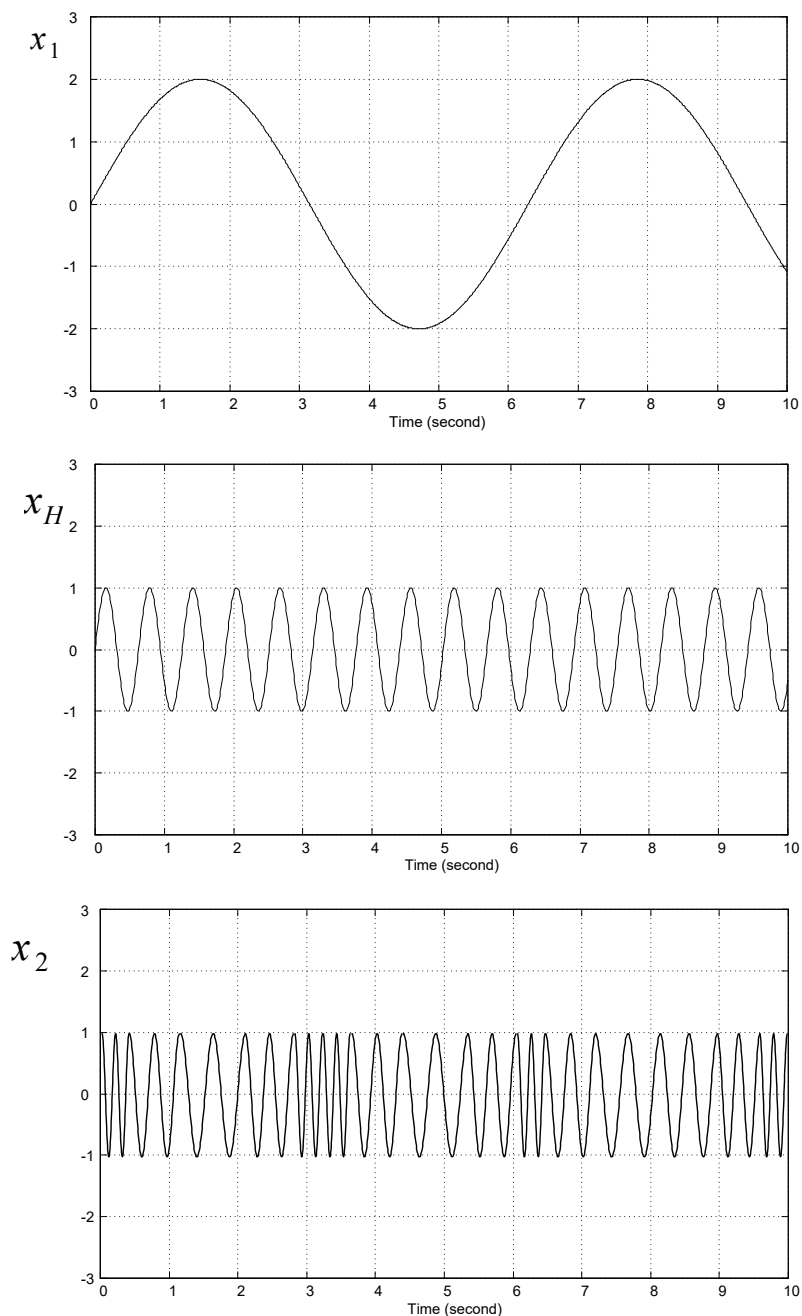
На фиг. 4.2 е показана система с амплитудна модулация.



Фиг. 4.2. Непрекъсната система с амплитудна модулация

3. Честотна модулация

Изходният сигнал от модулатора е хармоничен с честота ω , честотата се променя пропорционално на входния сигнал x_1 , а фазата се изменя на 180° при изменение на знака на входния сигнал – фиг. 4.3.



Фиг. 4.3. Непрекъсната система с честотна модулация

При фазовата модулация процесите са подобни на тези, с честотната модулация.

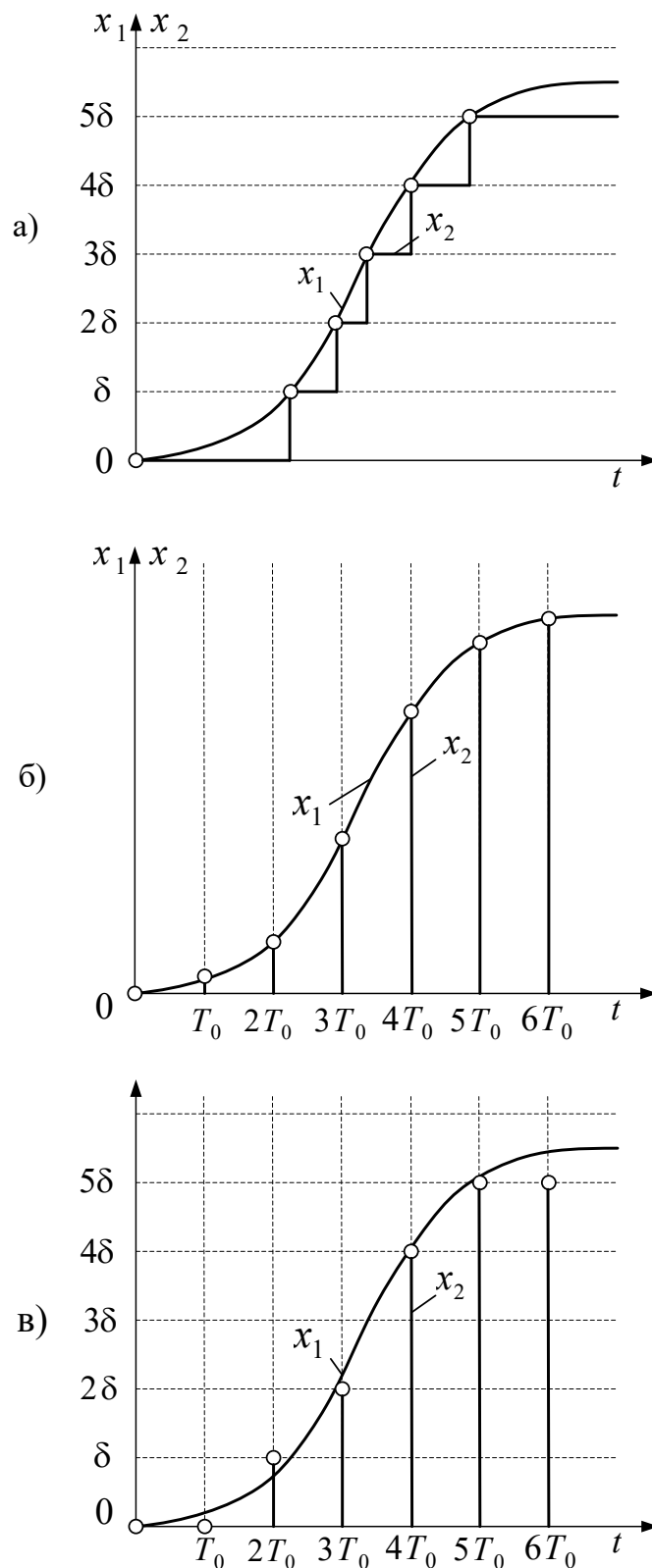


Фиг. 4.4. Дискретен модулатор

4.2. Системи с дискретна модулация.

Системи с дискретна модулация се наричат *дискретни системи*. Те съдържат поне един дискретен елемент ДЕ, изходната величина на който се

изменя дискретно при непрекъснато изменение на входния сигнал. Този елемент е дискретен модулатор преобразуващ непрекъснатата входната величина x_1 в дискретна x_2 .



Фиг. 4.5. Дискретизация по ниво – а, по време – б и по ниво и време – в.

Процеса на преобразуване на непрекъснатата величина в дискретна се нарича дискретизация /квантоване/. Съществуват три основни вида дискретизация фиг. 4.5:

- 1: по ниво
- 2: по време
- 3: по ниво и време

Дискретизация по ниво съответства на фиксиране на дискретни нива /предварително определени/ на сигнала в произволни моменти от време:

Дискретизация по време – фиксация на дискретните моменти от време, в което нивата на сигнала могат да приемат произволни стойности:

Дискретизация по време и ниво – непрекъснатия сигнал се заменя с дискретни нива, близки до стойността на непрекъснатия сигнал в дискретни моменти от време

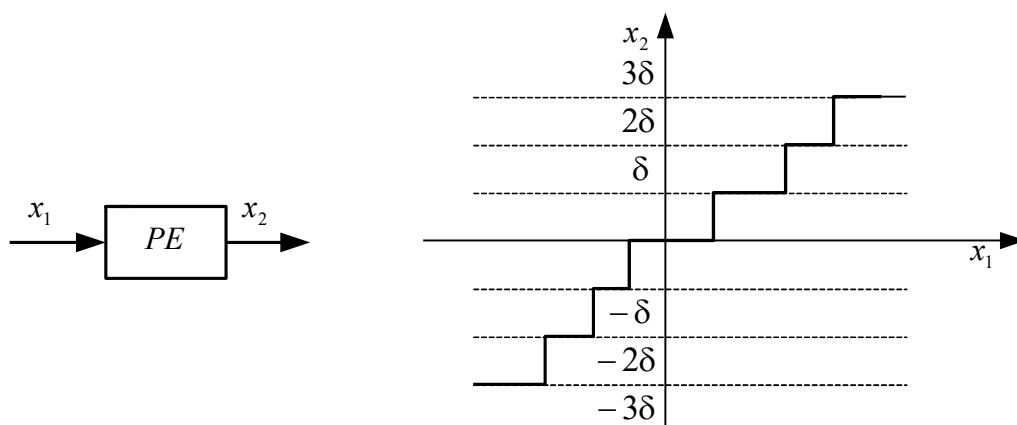
В резултат на дискретизация по ниво непрекъснатата функция на времето $x_1(t)$ се заменя със степенчатата функция. Дискретизацията по време води до замяна на входния сигнал $x_1(t)$ с така наречената решетъчна функция

$$x_2(t) = \begin{cases} x_1(nT_0) & \text{при } t = nT_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{при } t \neq nT_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

където, T_0 -стъпка на дискретизация по време или период на дискретизация.

Ординатите на решетъчната функция са точно равни на входната функция в дискретните моменти от време $t = nT_0$. При дискретизацията по ниво и време входния сигнал $x_1(t)$ също се заменя с решетъчна функция, но ординатите на тази функция представляват стойностите на $x_1(nT_0)$ закръглени до най-близкото цяло число на стъпката на дискретизация по ниво δ .

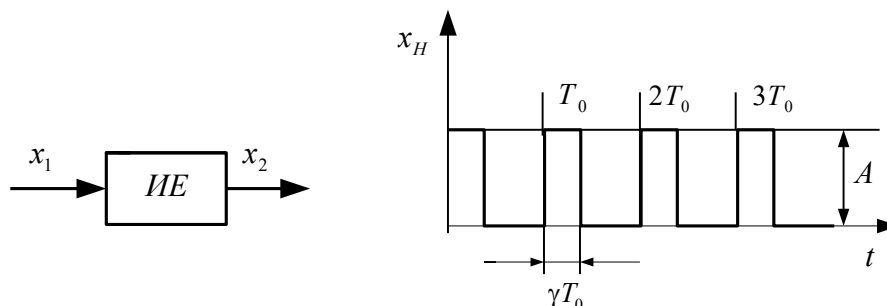
В зависимост от характера на дискретизация на сигнала дискретните елементи си делят на релейни, импулсни и релейно-импулсни, или цифрови.



Фиг. 4.6. Статична характеристика на релейен елемент

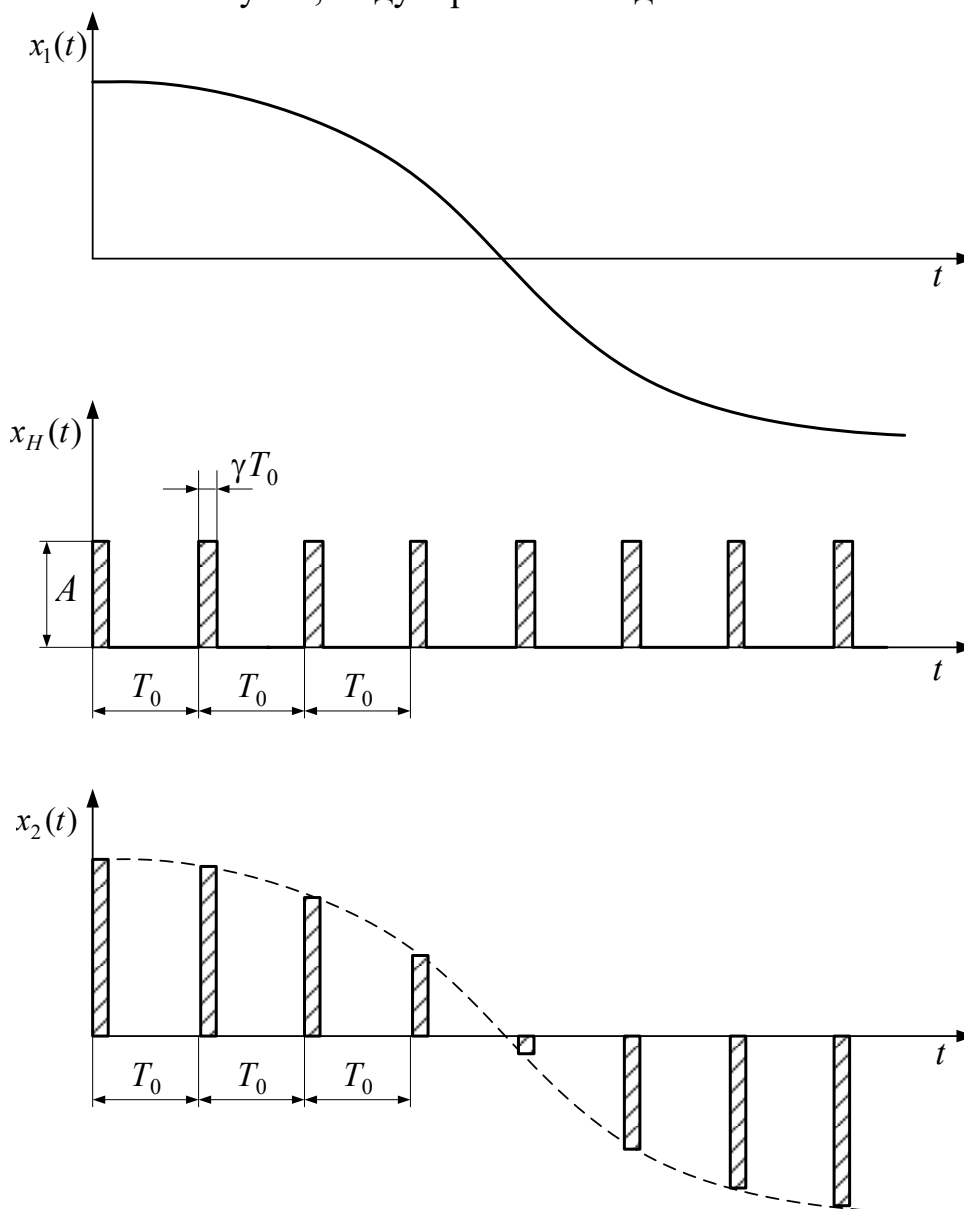
Релейни елементи са тези които осъществяват дискретизация по ниво. – фиг. 4.6. Изходната величина x_2 на такъв елемент може да приема само фиксирани стойности, равни на цяло число стъпки на квантоване по ниво δ . Примери за

релейни елементи са различните релета /механични, електрически, хидравлични, пневматични/ при които изходната величина се изменя скокообразно при достигане на входния сигнал на определена стойност.



Фиг. 4.7. Немодулирана последователност на импулси x_H

Импульсни елементи – устройства, осъществяващи дискретизация на входния сигнал по време фиг. 4.7. Изходната величина на елемента представлява последователност от импулси, модулирани от входния сигнал.



Фиг. 4.8. Амплитудоимпулсна модулация

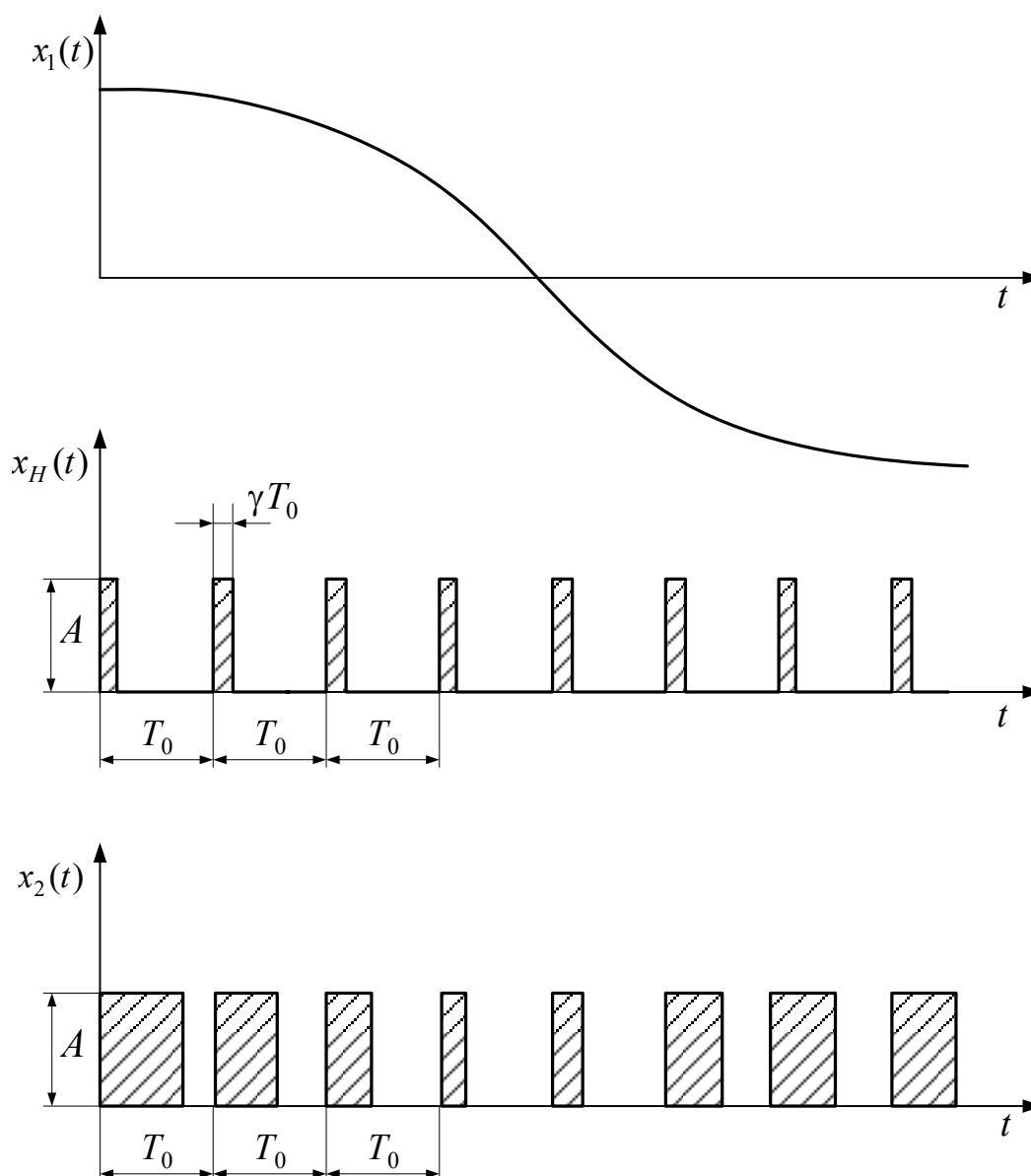
В зависимост от входния сигнал може да се променя всеки от параметрите на немодулираната импулсна последователност x_H : амплитудата A , период на повторението T_0 /или честота на повторението $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ /, продължителност на импулса γT_0 / $0 < \gamma \leq 1$ - число на запълване, равно на отношението на продължителността на импулса към периода на повторение/.

Съществуват Амплитудно импулсна модулация АИМ – фиг. 4.8, при която амплитудата на импулси на изхода на ИЕ е функция на входния сигнал.

$$A = A(x_1) \quad T_0 = \text{const} \quad \gamma T_0 = \text{const}$$

Широчинно импулсна модулация – фиг. 4.9.

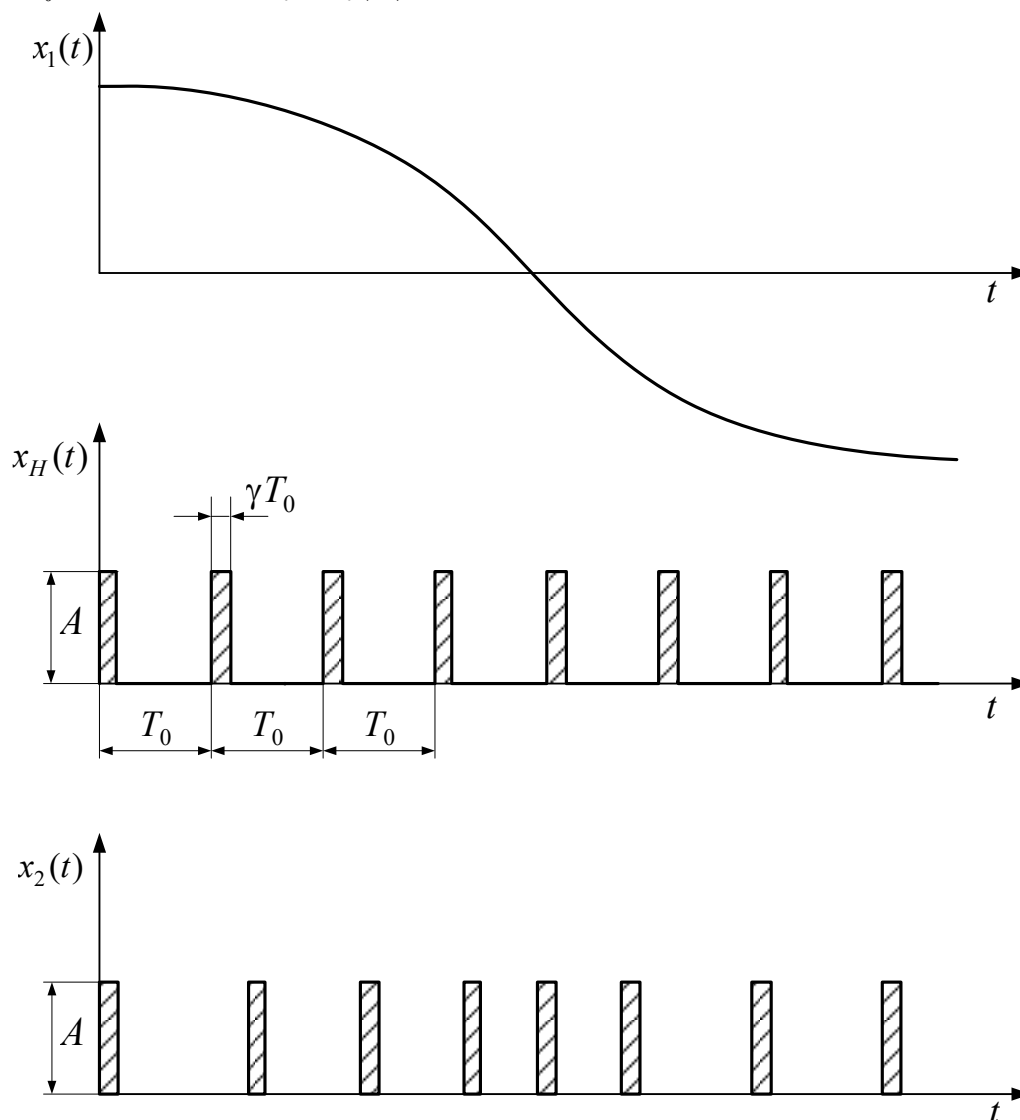
$$A = \text{const} \quad \gamma = \gamma(x_1) \quad T_0 = \text{const}$$



Фиг. 4.9. Широчинно импулсна модулация

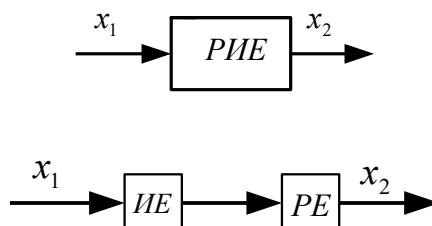
Честотно импулсна модулация – фиг. 4.10.

$$T_0 \gamma = \text{const} \quad T_0 = T_0(x_1) \quad A = \text{const}$$



Фиг. 4.10. Честотно импулсна модулация

Релейно – импулсни елементи – осъществява дискретизация на сигнала едновременно по ниво и време фиг. 4.11. Може да се получи, като се съединят последователно импулсен елемент ИЕ и релейен елемент РЕ. Осъществява се импулсно-кодова модулация на входния сигнал, при което резултатът на дискретизацията на входния сигнал x_1 се представя като набор от символи (код).



Фиг. 4.11. Релейно импулсен елемент

Кодирането на непрекъснати сигнали помага да се повиши точността и защитата от смущение при предаване на информацията. Особено добри възможности дават цифровите кодове, най – простия от които е двоичен код „0” и „1”. Двоичния код широко се използва в техническите устройства, като това се обяснява с това, че за възпроизвеждането на двата символа „0” и „1” трябва устройства с две различни устойчиви състояния.. Тези състояния могат да се реализират с помощта на различните релета – електрически, механични, хидравлични и пневматични, електронни схеми и др. Голямо преимущество на двоичния код е простотата на изпълнение на аритметичните действия с числа, зададени в двоична система.

Устройствата, преобразуващи непрекъснати сигнали в цифров код се наричат Аналого – цифрови преобразователи (АЦП), а обратно от цифрова в аналогова величина (ЦАП).

Релейни системи – системи съдържащи поне един релеен елемент. Отличават се с голямо бързодействие и компактност. Получили са широко приложение в техниката.

Импулсни системи – устройства съдържащи поне един импулсен елемент. Използват се в радиолокационните системи, за засичане на движещи се обекти /кораби, самолети, ракети и др./ и определяне на техните координати. Използването на импулсно радиоизлъчване позволява да се увеличи дистанцията на засичане и да се намалят габаритите и теглото на апаратурата. Важна особеност на импулсната модулация е възможността на предаване на няколко съобщения по един канал за връзка. Тази възможност се реализира с така нареченото временно разделяне на каналите, при което промеждутъка от време между импулсите, съответстващ на едно съобщение, се използва за предаване на други съобщения.

Релейно импулсни системи – съдържащи поне един релейно импулсен елемент. Най- перспективните са цифровите САР, в които изходната величина на РИЕ представя във вид на двоичен или друг вид код. Цифровите системи са в основата на цифровите изчислителни и компютъризирани устройства и системи. Използването на цифрови САР съществено повишава точността и защитата от смущенията на обработката на информация.

Прехода към цифровите САР води до намаляване на теглото и габаритите на системите. Използват се различни елементи от микро електрониката и микропроцесорни системи.

4.4. Класификация на автоматичните регулатори. Понятие за законите за регулиране

I. В зависимост от характера на регулируемата величина:

- регулатори на налягане
- регулатори на скорост на въртене
- на температурата
- на напрежение

II. В зависимост от използвания принцип на регулиране:

- регулатори работещи по отклонение (грешка)
- регулатори работещи по смущение
- комбинирани

III. В зависимост от допълнителният източник на енергия:

- регулатори с пряко действие
- регулатори с не пряко действие

IV. В зависимост от вида на енергията:

- електрически
- хидравлични
- механични
- пневматични
- електрохидравлични
- електропневматични
- електромеханични
- и т. н.

Към достоинства на електрическите регулатори се отнасят, компактността, малки габарити, възможности да се използват стандартни електронни елементи, широки възможности по усилване и преобразуване на сигналите, възможност за дистанционно управление и предаване на сигналите на голяма разстояние. Основен недостатък на електрическите регулатори е голямото тегло и габарити и сложността на електрическите елементи, когато трябва да се получи голям въртящ момент при малки скорости на въртене и голямо бързодействие. Цената на електрическите регулатори, в общия случай е по-висока от пневматичните и хидравличните регулатори от аналогичен тип, особено при изисквания за пожаро и взривобезопасност.

Най-голямото преимущество на хидравличните регулатори е високата надеждност при работа и добрите динамични свойства на хидравличните изпълнителни двигатели, развиващи значителни сили и моменти при високо бързодействие.

Преимуществото на пневматичните регулатори в сравнение с хидравличните е взриво и пожаро безопасността и отсъствие на връщащи тръбопроводи. Като недостатък е свиваемостта на въздуха, което носи допълнителни грешки в работата на системата за регулиране.

Най-голяма гъвкавост притежават системите от смесен тип, в които измервателната част се изпълнява от електрически елементи, а изпълнителния елемент е хидравличен или пневматичен. В настоящия момент в различни отрасли на промишлеността са използват електрохидравлични и електропневматични следящи системи.

V. В зависимост от наличието на обратни връзки:

- регулатори без местни обратни връзки

- регулатори с допълнителни обратни връзки

VI. В зависимост от броя на регулираните величини:

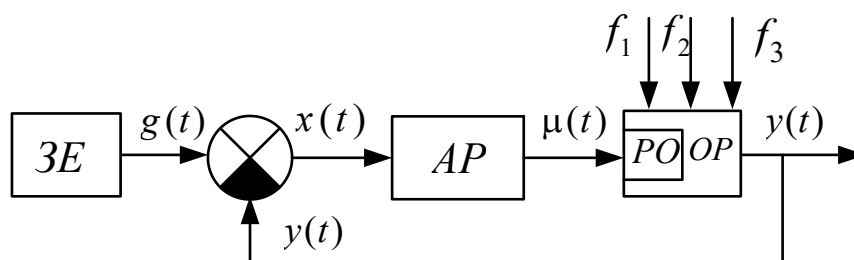
- едномерни
- многомерни

VII. В зависимост от характера на модулацията:

- непрекъснати (аналогови)
- импулсни
- релейни
- цифрови

Автоматичните регулатори си класифицират по същите признаци, както и системите за автоматично регулиране като цяло.

От гледна точка на ТАРУ най-голяма полза носи класификацията на регулаторите според реализирания в тях закон за регулиране. Схемата на типова система на САР по грешка е показана на фиг. 4.12.



Фиг. 4.12. Типова схема на САР

Основна задача на регулаторите е определяне на грешката $x(t)$ / $x(t) = g(t) - y(t)$ / и формиране на регулиращото въздействие $\mu(t)$, така че $x(t) = 0$ с определена степен на точност.

Основна характеристика на регулатора е уравнението свързващо регулиращото въздействие $\mu(t)$ с грешката $x(t)$. В повечето реални системи връзката е сложна и се описва с диференциални уравнения от висок ред. За целта на сравнителния анализ и класификацията обикновено уравнението на регулатора се опростява, като се пренебрегват инерционните свойства на елементите, влизащи в състава на автоматичния регулатор.

Закон на регулиране се нарича зависимостта между входната величина на регулатора и неговата изходна величина, съставена без отчитане на инерционността на неговите елементи.

В най-елементарните системи регулиращото въздействие зависи само от грешката x :

$$\mu = \mu(x) \quad (4.2)$$

Ако функцията е линейна то:

$$\mu = \mu_0 + k x(t) \quad (4.3)$$

където,

$$\mu_0 = const;$$

k - коефициент на пропорционалност.

Ако се означаи $\Delta\mu = \mu - \mu_0$, ще се получи

$$\Delta\mu = k x(t) \quad (4.3)$$

Закона за регулиране, описан с уравнение (4.3) се нарича пропорционален закон на регулиране. Регулатори, които използват този закон се наричат пропорционални “П” регулатори.

Основни преимущества на “П” регулатора са тяхната простота. Точността им на регулиране е малка, има статична грешка.

Интегрален Закон на регулиране “И” – регулатор

$$\Delta\mu = k \int_0^t x \cdot dt. \quad (4.4)$$

При тях се увеличава точността в установен режим, но се намалява бързодействието.

Пропорционално интегрален Закон за регулиране “ПИ” – регулатор

$$\Delta\mu = k \int_0^t x \cdot dt + k_1 x(t), \quad (4.5)$$

няма статична грешка

Пропорционално – диференциален Закон за регулиране “ПД” – регулатори

$$\Delta\mu = kx + k_1 \frac{dx}{dt} \quad (4.6)$$

Те реагират не само на самата грешка на $x(t)$ но и на тенденцията нейното изменение. Подобрява се поведението на САР в неустановени режими:

Диференциален Закон на регулатора – “Д”

$$\Delta\mu = k \frac{dx}{dt} \quad (4.7)$$

Регулирането с “Д” – регулатор не се използва защото той не реагира на постоянни грешки:

при $x = const$ $\Delta\mu = 0$

Пропорционално – интегрално – диференциален Закон за регулиране “ПИД” – регулатор.

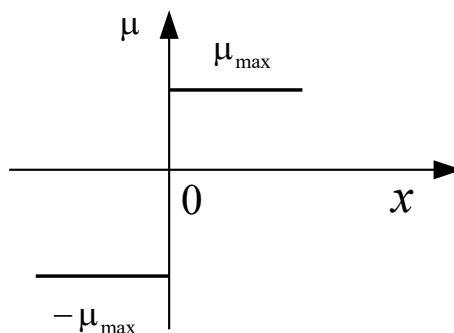
$$\Delta\mu = kx + k_1 \frac{dx}{dt} + k_2 \int_0^t x(t) \cdot dt \quad (4.8)$$

В по-сложните регулатори могат да се въведат и повече интеграли от грешката, и да се вземат производни от по – висок ред. Това са линейни закони на регулиране.

Нелинейните закони също се използват:

Релейни закони

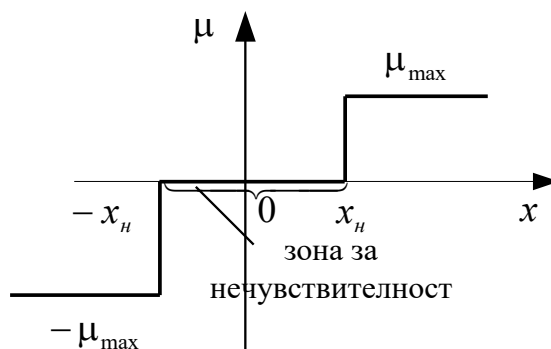
Идеално двупозиционно реле – на фиг. 4.13 е показана статичната характеристика, която се описва с уравнение 4.9.



Фиг. 4.13. Статична характеристика на идеално двупозиционно реле

$$\mu(x) = \begin{cases} -\mu_{\max} & x < 0 \\ \mu_{\max} & x > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Идеално три позиционно реле на фиг. 4.14 е показана статичната характеристика, която се описва с уравнение 4.10.



Фиг. 4.14. Статична характеристика на идеално трипозиционно реле

$$\mu(x) = \begin{cases} -\mu_{\max} & x < -x_H \\ 0 & -x_H < x < x_H \\ \mu_{\max} & x > x_H \end{cases} \quad (4.10)$$

Използването на релейни закони, в много случай опростява технически решаването на проблема с регулирането на определена величина. Използването на релейни закони за регулиране и управление може да доведе до такива резултати, които принципно не могат да се осъществят с релейни регулатори.

4.5. Основни задачи на теорията на автоматичното регулиране и управление

Както и другите технически устройства, автоматичните системи на първо място трябва да удовлетворят изискванията от общотехнически характер:

- надеждност
- защита от смущение
- удобство на експлоатацията
- технологичност на конструкциите
- минимална цена, тегло, габарити

Особено важно за САР е изискването за точност при работа. Изискването за точност регламентират големината на грешката, което при различни условия на работа на системата не трябва да превишава зададената големина.

САР работят на два основни режима:

- установени (статични)
- неустановени

Неустановения режим често се нарича преходен или динамичен режим. Той може да се предизвика или от изменение на външни въздействия, или от изменението на параметрите на САР, или от съвместното действие на тези два фактора.

Под параметри на системата се разбират: предавателни числа, коефициенти на усилване, времеконстанти, инерционни моменти, еластични константи на пружини, капацитети, индуктивности, коефициенти на съпротивление и др.

В общия случай грешката на САР се дефинира с уравнението:

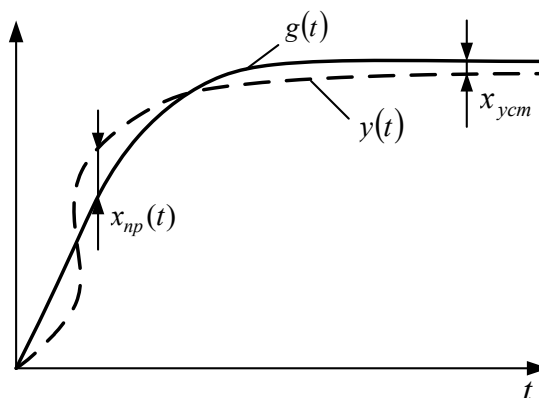
$$x(t) = x_{уст}(t) + x_{пр}(t) \quad (4.11)$$

$x_{уст}(t)$ - грешка в установен режим

$x_{пр}(t)$ - грешка в преходен режим

Уравнението (4.11) показва, че изискванията към точността на работа на САР могат да се разделят на:

- изисквания за точност в установен режим (ограничаване на $x_{уст}$)
- изисквания за точност в преходен режим (ограничаване на $x_{пр}$)



Фиг. 4.15. Схема към определяне на грешката на САР

Смущенията, действащи на САР са непрекъснати функции на времето, закона за изменение на които е трудно да се предвиди. В програмните системи и следящите системи във времето се изменят и задаващите въздействия. За това основния режим на работа е неустановения, преходен режим.

За изследване на САР трябва да се разглеждат процесите както в установен, така и в преходен режим – фиг. 4.15.

При изследването на САР се въвеждат от типови закони за изменение на външните въздействия. Това са най-вероятните и най-неблагоприятните закони за изменение на задаващото и смущаващото въздействие.

Най-често като типови се приемат полиномни въздействия:

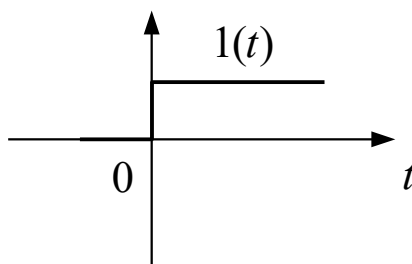
$$g(t) = \frac{g_n}{n} t^n 1(t) \quad (4.12)$$

$$g(t) = \frac{f_n}{n} t^n 1(t) \quad (4.13)$$

където $n = 0, 1, 2, \dots$ натурално число, $g_n = \text{const}$, $f_n = \text{const}$.

Най-често използваното входно въздействие е единична степенчатата функция фиг.4.16.

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0 \\ 1 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

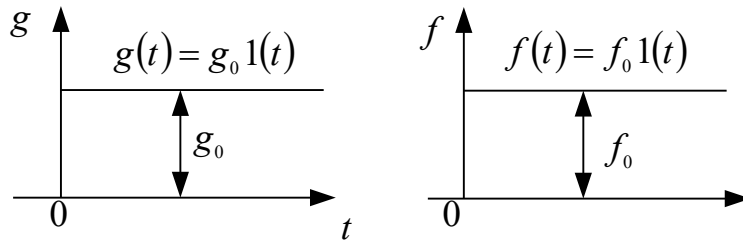


Фиг. 4.16. Единична степенчатата функция

При $n = 0$ се определят степенчати входни въздействия – фиг. 4.17.

$$g(t) = g_0 1(t) \quad (4.15)$$

$$f(t) = f_0 1(t) \quad (4.16)$$



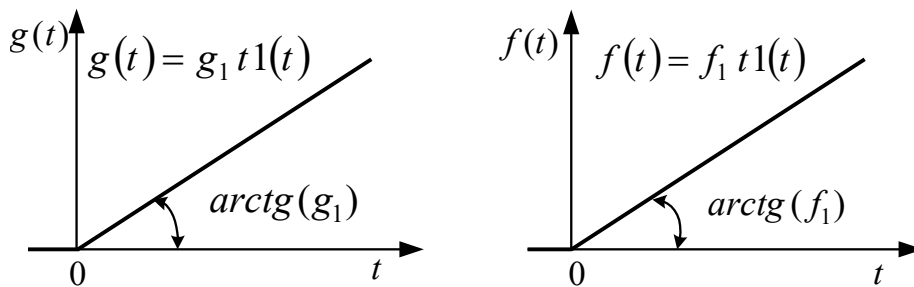
Фиг. 4.17. Стъпални входни въздействия

Този процес физически съответства на процес на пренастройка на системата на нова стойност на регулируемата величина, входното въздействие от типа (1.32) характеризират стъпално изменение в натоварването, мигновено включвана или изключване на потребители на енергия.

При $n = 1$ - типово въздействие изменящо се с постоянна скорост фиг. 4.18.

$$g(t) = g_1 t 1(t) \quad (4.17)$$

$$f(t) = f_1 t 1(t) \quad (4.18)$$

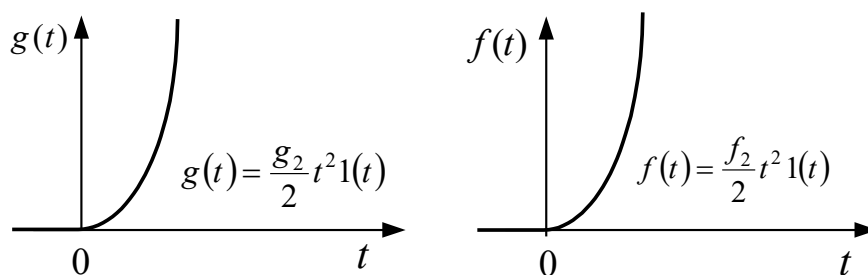


Фиг. 4.18. Входни въздействия изменящи се с постоянна скорост

При $n = 2$ - типово въздействие изменящо се с постоянно ускорение фиг. 4.19.

$$g(t) = \left(\frac{g_2}{2} \right) t^2 1(t) \quad (4.19)$$

$$f(t) = \left(\frac{f_2}{2} \right) t^2 1(t) \quad (4.20)$$



Фиг. 4.19. Входни въздействия изменящи се с постоянно ускорение

Освен полиноми, често се използват и хармонични входни въздействия – фиг. 4.20.

$$g(t) = g_{\max} \sin(\omega_g t + \varphi_g) 1(t) \quad (4.21)$$

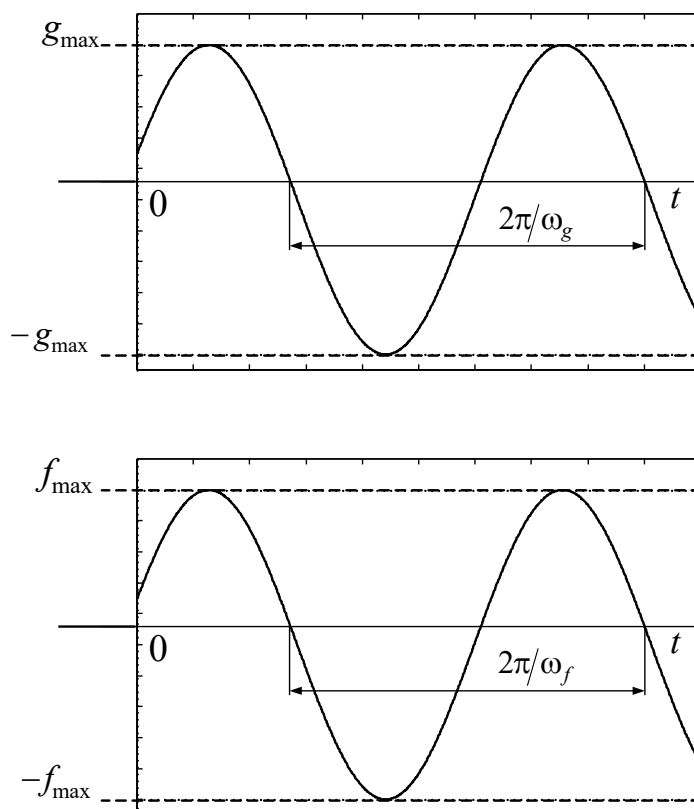
$$f(t) = f_{\max} \sin(\omega_f t + \varphi_f) 1(t) \quad (4.22)$$

Те характеризират поведението на системата в условията на удари, вибрации, и т.н.

$g_{\max}, f_{\max}$ - амплитуди на хармоничните сигнали

ω_g, ω_f - кръгови честоти

φ_g, φ_f - начални фазови разлики



Фиг. 4.20. Хармонични входни въздействия

Моментът на прилагане на външното въздействие в ТАРУ обикновено се приема в нулевия момент $t = 0$. Всички външни въздействия за отрицателните моменти от време се считат за равни на нула. За да се подчертае това обстоятелство, в аналитичните изрази за външните въздействия се въвежда единична степенчата функция.

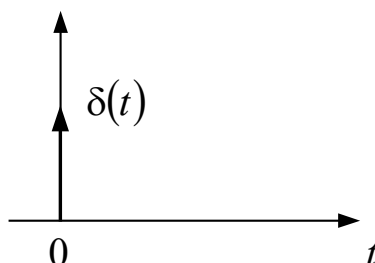
В някои случаи в качеството на типови въздействия се приема въздействието:

$$g(t) = g^0 \delta(t) \quad (4.23)$$

$$f(t) = f^0 \delta(t) \quad (4.24)$$

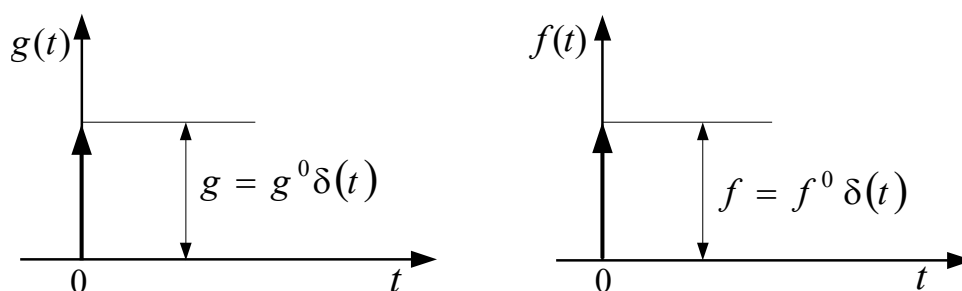
където $\delta(t)$ се нарича **единична делта /импулсна/ функция** – фиг. 4.21.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$



Фиг. 4.21. Единична делта /импулсна/ функция

Въздействията от типа (4.23) и (4.24) се наричат **импулсни входни въздействия**



Фиг. 4.22. Импулсни входни въздействия

Основно свойство на $\delta(t)$ функцията е

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Делта функцията $\delta(t)$ е математическа идеализация на импулс с безкрайно малка продължителност, имаща крайна площ равна на единица.

При каквото и да е входни въздействия в САР протичат преходни процеси. Ако тези процеси затихват, то след завършването им системата заема установено състояние.

Най-трудната задача е да се изследва поведението на САР в неустановените режими, в динамика. Съвременните автоматични системи са сложни динамични системи и за тяхното изследване обикновено се разделя изследване на устойчивостта и изследване на качеството на преходните процеси.

За удовлетворителна работа на САР е необходимо, начално отклонение на регулируемата величина от искания закон на регулиране с течение на времето да се стреми към нула. САР имащи това свойство се наричат устойчиви. В устойчивите системи преходните процеси с времето затихват. В неустойчивите САР – преходните процеси са разходящи.

Всяка САР трябва да се изследва на устойчивост. Изискването системата да е устойчива гарантира само, че преходните процеси затихват с течение на времето. Времето за затихване и формата на преходните процеси могат да са различни. За това устойчивостта е необходимо, но не достатъчно условие за добрата работа на САР. Освен на устойчивост САР трябва да се изследват и за качество на работа.

Качеството на САР характеризира нейното поведение в неустановен режим. Използват се различни критерии за качество, които представляват числени характеристики, зависещи от структурата и параметрите на системата. САР се счита за работоспособна, ако критериите за качество са в рамките на зададените граници.

Изследването на устойчивостта и качеството на САР трябва да се извършва с изследването на поведението ѝ в установен /статичен/ режим.

Основни проблеми, подлежащи на решаване в ТАРУ са:

- точност на работа в установен режим
- устойчивост
- качество

Решаването на тези проблеми става чрез методите за анализ и синтез на САР.

- анализ – изследване на готови САР с цел определяне свойствата ѝ и начините за подобрене;
- синтез – проектиране на САР отговаряща на предварително зададени изследвания.

При проектиране на САР се използват както теоретични, така и експериментални методи на изследване. Използването на теоретични методи за анализ и синтез изисква предварителна математично описание на САР. Системата уравнения, описващи работата на автоматичната система се нарича *математичен модел на САР*.

Обикновено математичното описание на САР се прави с система диференциални, интегрални, диференциални с крайни разлики и крайни разлики.

В зависимост от характера на математичния модел, всички системи за регулиране и управление е прието да се делят на: обикновени линейни, особени линейни и нелинейни.

Обикновени линейни /линейни стационарни/ са системи, работата на които с достатъчна степен на точност може да опише с система обикновени линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти.

Особени линейни се наричат САР, математичното описание на които е система от линейни уравнения, различни от обикновените линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти. Към тях се отнасят:

- *линейни системи с променливи параметри* /линейни нестационарни/, описвани с обикновени линейни диференциални уравнения с променливи във времето коефициенти;
- *линейни системи с разпределени параметри*, описвани от линейни диференциални уравнения с частни производни;
- линейни системи със закъснение, математичния модел е система линейни диференциални уравнения с аргумент със закъснение;
- Линейни импулсни системи, математичното описание се прави със система линейни уравнения с крайни разлики.

Нелинейни САР са тези, при които работата се описва с нелинейни уравнения /диференциални, интегрални, с разлики и др./

Една и съща система за регулиране може да се опише както с линейни, така и с нелинейни уравнения в зависимост от допусканията, приети при съставяне на уравненията и целта на изследване.

Изследването на линейните системи е значително по-просто, от нелинейните, защото при тях е валиден принципът на суперпозицията, съгласно който, реакцията на линейната система на произволна комбинация от външни въздействия е равна на сумата от реакциите на всяко от тези въздействия, взето по отделно. Принципът на суперпозицията позволява да се създаде обща теория на линейните системи, описвани с диференциални или уравнения с крайни разлики.

За нелинейните системи принципът на суперпозицията не е валиден и обща теория на нелинейните системи не съществува. За това когато е възможно, при математичното описание работата на САР се пренебрегват различните видове нелинейности, за да се получи математичен модел във вида на система линейни уравнения. Това обаче, не може да се прилага винаги. Критерият за правилността на приетите допускания е практиката. Ако резултатите от експерименталното изследване на САР, дават съществена разлика с теорията, това показва некоректност на допусканията, приети при математичното описание на САР. Много често, причината за разликата на резултатите от експеримента с теорията е влиянието на различните нелинейни фактори, които не са отчетени при съставяне на математичния модел.

Съвременните САР се описват с сложни математични модели, представляващи системи диференциални /или други/ уравнения от висок ред. За това в ТАРУ се използва сложен математичен апарат. Възникващите при

изследването на САР трудности от математичен характер, водят до това, че резултатите от теоретичното изучаване на работата на системата за регулиране, често имат приблизителен характер. За уточняване на резултатите и окончателно избиране на параметри на САР се използва широко компютърна техника с последваща окончателна настройка в реални условия. В настоящото време съществуват различни специализирани софтуерни приложения, които се използват при анализа и синтеза на САР.

ГЛАВА 5

ДИНАМИЧНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ЛИНЕЙНИ ЕЛЕМЕНТИ И СИСТЕМИ – СЪСТАВЯНЕ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

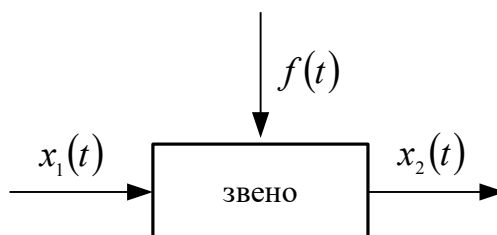
5.1 Понятие за динамично звено. Статични и динамични характеристики на динамичните звена

Всяка САР може да се разглежда във вид на съвкупност от отделни взаимосвързани елементи на автоматиката (ЧЕ; ИЕ; ПЕ), които си взаимодействат помежду си и с обекта за регулиране или управление. Разбиването на системите за автоматично управление на елементи позволява да се въведат функционалните схеми на автоматичната система.

За количественото изследване на процесите, протичащи при автоматичното управление са необходими уравнения описващи работата на САУ. Тези уравнения се получават като се разбие системата на сравнително прости части и се съставят уравненията за всяка от тези части по отделно.

За математическото описание на САУ е удобно да се разбива не на елементи от автоматиката, а на динамични звена. Динамичното звено е част от САУ описвано от диференциално (или друго) уравнение от определен вид. В частност, всеки елемент от автоматиката е съвкупност от такива звена, и даже цялата система за автоматично управление. Съществено отличие от елементите на автоматиката е, че динамичните звена не са непременно конструктивно или схемно оформено устройство. В отделни случаи динамичните звена могат въобще да нямат физически смисъл, характеризирайки само математически зависимости между някои величини от автоматичните системи.

Състоянието на всяко динамично звено /фиг. 5.1/ може да се характеризира със съвкупност от физически величини – обобщени координати. Избира се обикновено една обобщаваща координата на входа на звеното и една на изхода и ги наричаме съответно входни и изходни величини на звеното:



Фиг. 5.1. Условно изображение на динамично звено

$x_1(t)$ - входна величина

$x_2(t)$ - изходна величина

$x_1(t)$ и $x_2(t)$ са функции на времето

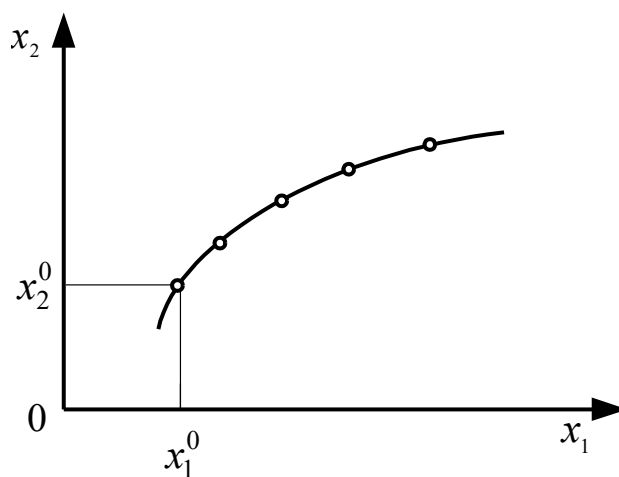
Много от звената от автоматичното устройство притежават свойството посочност на действието – предава се въздействието с една посока – от входа

към изхода. При тези звена при изменение на входната величина $x_1(t)$ се изменя и изходната величина $x_2(t)$, изменението на изходната величина не се отразява на входната величина. Свойството еднопосочност се реализира за сметка на усилване на входния сигнал по мощност. Пасивните звена /лост, редуктор, пасивни ел. вериги и др./ не притежават това свойство.

В общия случай, освен входната величина $x_1(t)$, на изходната величина влияе и смущаващото въздействие $f(t)$ /могат да се няколко/.

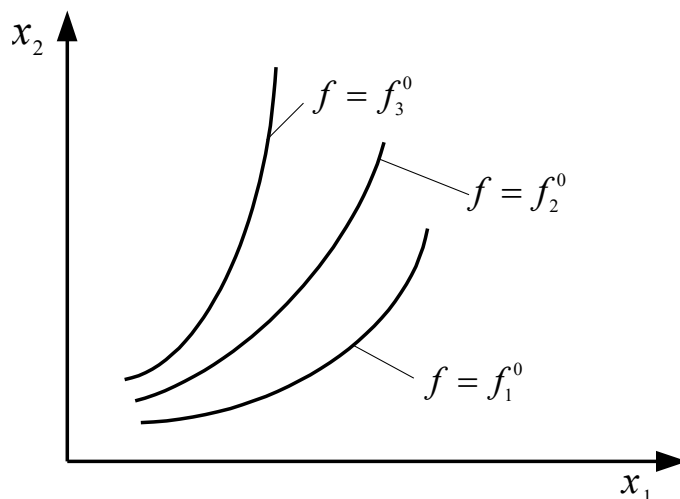
Зависимостта между входната и изходната величина в установен режим се нарича *статична характеристика на звеното*. Статичната характеристика се изобразява графично в плоскостта на x_1 и x_2 , и може да се получи експериментално или теоретично.

Експерименталното снемане на статичната характеристика става по следния начин - фиг. 5.2: Входната величина се задава постоянна стойност $x_1 = x_1^0$. Изчаква се времето за затихване на преходния процес, и с помощта на съответен измервателен удар се определя установеното значение на изходната величина $x_2 = x_2^0$ - получава се първата точка на статичната характеристика (x_1^0, x_2^0) . Като се повторят тези измервания за различни стойности на x_1 , и съединявайки точките с плавна крива се получава статична характеристика на звеното - фиг. 5.2.



Фиг. 5.2. Построяване на статична характеристика по експериментален път

По тази крива, за всяка произволна стойност на входната величина x_1 , може да се определи съответното установено значение на изходната координата x_2 . В случаите когато, изходната величина освен от x_1 , зависи и друга величина f , звеното се характеризира със семейство от статични характеристики построени за различни постоянни значения на $f = f_0$ - фиг. 5.3.



Фиг. 5.3. Построяване на семейство от статични характеристики

За аналитично определяне на статичните характеристики трябва да се съставят уравнения описващи работата на звеното в установен режим. Като се решат тези уравнения относно x_1 и x_2 ще се получат уравненията на статичната характеристика в явен:

$$x_2 = x_2(x_1), \quad (5.1)$$

в неявен вид:

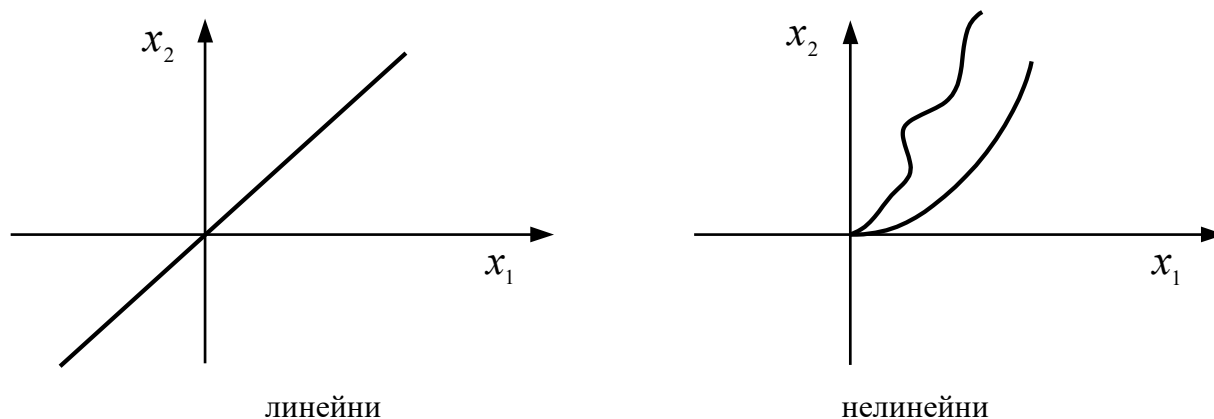
$$\varphi(x_1, x_2) = 0, \quad (5.2)$$

или параметричен вид:

$$x_1 = x_1(\alpha), \quad x_2 = x_2(\alpha), \quad (5.3)$$

където α е параметър.

Обикновено статичните характеристики са нелинейни. Линеините характеристики се срещат рядко. В инженерната практика нелинейните характеристики често се заменят с линейни.



Фиг. 5.4 Линеини и нелинейни статични характеристики

Статичните характеристики (или семейство статични характеристики) напълно характеризират поведението на динамичното звено в установен режим.

САР работят предимно в нелинейни режими. За това по-важна задача е да се изучи поведението на динамичните звена в преходни режими.

5.2. Съставяне на динамичните характеристики на динамични звена

За теоретично изследване динамичните свойства на звената преди всичко е необходимо да се съставят уравненията описващи поведението при изменящи се външни въздействия, т. е. да се изразят в математическа формула съотношенията свързващи обобщените координати на изхода и входа в неустановените процеси. В повечето случаи това са диференциални уравнения от различен вид.

Примерен ред за съставяне на диференциални уравнения на динамичните звена:

1. Определят се входно и изходната величина на звеното и се установяват допълнителните фактори от които зависи изходната величина.
2. Определя се началото на координатната система и се определят положителните направления за нарастване на всички влизащи в разглеждането променливи.
3. Въвеждат се опростяващи предположения (допускания).
4. Използват се основни закони от науката и техниката към които се отнасят изследващите звена:
 - закони на Нютон – за механични звена;
 - закони за съхраняване на енергията, вещество, количество на движението – за хидро и пневмо звена;
 - закони на Кирхоф – за електрически звена.

Диференциалните уравнения имат най-разнообразен вид. За звена с непрекъснато действие със съсредоточени параметри те имат вида:

$$F(x_2^n, x_2^{n-1}, \dots, \dot{x}_2, x_2, x_1^m, x_1^{m-1}, \dots, \dot{x}_1, x_1, f^q, f^{q-1}, \dots, \dot{f}, f) = 0. \quad (5.4)$$
$$m < n, \quad q < n$$

n - ред на диференциалните уравнение.

При $n = 1$ имаме уравнение от I – ред

$$F(\dot{x}_2, x_2, x_1, f) = 0. \quad (5.5)$$

При $n = 2$

$$F(\ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2, \dot{x}_1, x_1, \dot{f}, f) = 0. \quad (5.6)$$

Неизвестна функция на ДУ е изходната величина x_2 . За да се решат уравненията, трябва да са зададени x_1 и f като функции на времето и началните условия.

Уравнението на статичната характеристика е частен случай на ДУ. При него:

$$x_1 = \text{const}, \quad f = \text{const}, \quad x_2 = \text{const},$$

$$F(0, 0 \dots 0, x_2, 0, 0 \dots 0, x_1, 0, 0 \dots 0, f). \quad (5.7)$$

5.3. Линеаризация на нелинейните уравнения на динамичните звена

Ако уравнението (5.4) е нелинейна функция на аргументите си, то динамиката на работата на звеното се описва с нелинейно диференциално уравнение, а звеното се нарича *нелинейно динамично звено*. Ако диференциално уравнение е линейно, то звеното се нарича *линейно динамично звено*. Линейността на статичната характеристика въобще не дава основание да съди, че звеното е линейно, защото се срещат случаи, когато нелинейните свойства се проявяват в динамичен режим.

Изследване на нелинейните диференциални уравнения е значително по-трудно от линейните. Затова, когато е възможно се линеаризират нелинейните ДУ, т. е. заменят се приблизително с някое линейно диференциално уравнение, решението на което е достатъчно близко до решението на изходното нелинейно диференциално уравнение.

Най-простият случай на линеаризация се основава на разлагане на нелинейната функция в ред на Тейлор с последващо отхвърляне на нелинейните членове от разложението.

Линеаризацията на нелинейното уравнение се извършва относно някой по-рано избран режим на работа на динамичното звено. Най-често се избира установения режим, характеризиращ се с постоянство на всички обобщени координати.

За уравнение от първи ред $F(\dot{x}_2, x_2, x_1, f) = 0$, уравненията на изходния режим могат да се запишат:

$$x_1 = x_1^0 \quad x_2 = x_2^0 \quad f = f^0;$$

където, $x_1^0 = \text{const}$ $x_2^0 = \text{const}$ $f^0 = \text{const}$ са постоянни величини, свързани с уравнението $F(0, x_2^0, x_1^0, f^0) = 0$.

1. Представят се всички координати във вида:

$$x_1 = x_1^0 + \Delta x_1 \rightarrow \Delta x_1 = x_1 - x_1^0;$$

$$x_2 = x_2^0 + \Delta x_2 \rightarrow \Delta x_2 = x_2 - x_2^0;$$

$$f = f^0 + \Delta f \rightarrow \Delta f = f - f^0;$$

$$\dot{x}_2 = 0 + \Delta \dot{x}_2 \rightarrow \Delta \dot{x}_2 = \dot{x}_2 - 0 \text{ или } \dot{x}_2 = \Delta \dot{x}_2;$$

където, $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta f$ - отклонения на съответните координати от установените им значения.

2. Лявата част на уравнението (5.5) се разлага в ред на Тейлор, относно точката с координати $(0, x_2^0, x_1^0, f^0)$

$$F(.) = F(0, x_2^0, x_1^0, f^0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)^0 \Delta f + . \quad (5.8)$$

$$Q(\Delta \dot{x}_2, \Delta x_2, \Delta x_1, \Delta f) = 0$$

В съответствие с правилото за разлагане на функция на няколко променливи в ред на Тейлор, частните производни, влизащи в лявата част на уравнението (5.7), се изчисляват в точките приети за изходни при линеаризацията, като $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0$ означава частна производна от функцията $F(\dot{x}_2, x_2, x_1, f)$ по отношение на $\dot{x}_2$, в която след определянето ѝ се заместват стойностите $\dot{x}_2 = 0$, $x_2 = x_2^0$, $x_1 = x_1^0$, $f = f^0$. Тъй като в изходния режим всички координати са постоянни, то всички частни производни представляват числа, зависещи от избора на изходния режим (т. е. от x_1^0, x_2^0, f^0). Със символа $Q(\Delta \dot{x}_2, \Delta x_2, \Delta x_1, \Delta f)$ е означен остатъчният член от разложението съдържащ втора и по-висока степен производни на отклоненията $\dot{x}_2, \Delta x_2, \Delta x_1, \Delta f$ и техните произведения, умножени със съответните частни производни. Функцията $Q(\dot{x}_2, \Delta x_2, \Delta x_1, \Delta f)$ има свойството, че

$$Q(0, 0, 0, 0) = 0. \quad (5.9)$$

3. Отклоненията $\Delta x_2, \Delta x_1, \Delta f$ на координатите от техните изходни стойности се приемат за малки, и на това основание се пренебрегват членовете съдържащи втора и по-висока степен от отклоненията и техните произведения, като членове с по-висок порядък на малкост, от членовете съдържащи отклоненията в първа степен

$$Q(\Delta \dot{x}_2, \Delta x_2, \Delta x_1, \Delta f) \approx 0. \quad (5.10)$$

Окончателно се получава:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)^0 \Delta f = 0. \quad (5.11)$$

Това е линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти. То представлява линеаризация на изходното нелинейно уравнение относно изходния режим.

Необходимо условие за линеаризация е разлагане на функцията F в ред на Тейлор в околността на точка с координати, съответстващи на режима избран при линеаризация на изходен. Ако това разлагане е невъзможно, динамичното звено е съществено нелинейно.

Основно допускане, което позволява да се премине от нелинейно уравнение към линейно е допускането за малките отклонения от всички координати, от техните стойности, приети за изходни.

5.4. Стандартна форма на запис на уравнения на динамичните звена

В автоматиката при запис на линейните уравнения е прието изходната величина и нейните производни да се записват от лявата страна на диференциалното уравнение, а всички останали членове се записват в дясната част.

$$c_0 \Delta \dot{x}_2 + c_1 \Delta x_2 = b_0 \Delta x_1 + r_0 \Delta f, \quad (5.12)$$

$$c_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right)^0, \quad c_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0, \quad b_0 = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0, \quad r_0 = - \left(\frac{\partial F}{\partial f} \right)^0. \quad (5.13)$$

В ТАРУ се използва символичен запис на линейните диференциални уравнения, в основата на който лежи символичното означение на производните и интеграла:

$$px = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^k x}{dt^k} = p^k x \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (5.14)$$

$$\int x dt = \left(\frac{1}{p} \right) x; \quad (5.15)$$

$$p = \frac{d}{dt}; \quad (5.16)$$

където p - символ за диференциране.

Като се използват символичните означения, уравнението (5.12) се записва

$$c_0 p \Delta x_2 + c_1 \Delta x_2 = b_0 \Delta x_1 + r_0 \Delta f, \quad (5.17)$$

или

$$(c_0 p + c_1) \Delta x_2 = b_0 \Delta x_1 + r_0 \Delta f. \quad (5.18)$$

Означава се

$$\left. \begin{aligned} c(p) &= c_0 p + c_1 \\ b(p) &= b_0 \\ r(p) &= r_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{символични полиноми;}$$

и уравнението се записва по-компактно

$$\Rightarrow c(p) \Delta x_2 = b(p) \Delta x_1 + r(p) \Delta f.$$

Разделят се всички членове на диференциалното уравнение на коефициента пред изходната величина на звеното c_1

$$\left(\frac{c_0}{c_1} p + 1 \right) \Delta x_2 = \frac{b_0}{c_1} \Delta x_1 + \frac{r_0}{c_1} \Delta f$$

$$\frac{c_0}{c_1} = T, \quad \frac{r_0}{c_1} = k_f, \quad \frac{b_0}{c_1} = k$$

Получава се линейното диференциално уравнение в стандартна форма на запис:

$$(Tp + 1)\Delta x_2 = k\Delta x_1 + k_f \Delta f.$$

Всички членове на уравнението имат размерността на величината Δx_2 , Като се отчита, че $p \rightarrow \left[\frac{1}{s} \right] \Rightarrow T \rightarrow [s]$. T се нарича времеконстанта.

$$\text{Размерностите на коефициентите са съответно } k = \left[\frac{x_2}{x_1} \right] \quad [k_f] = \left[\frac{x_2}{f} \right].$$

k, k_f - коефициенти на предаване по входна величина и по смущение.

Ако се положи, $p(\Delta x_2) = 0$, линеаризираното уравнение за установения режим на работа има вида:

$$\Delta x_2 = k\Delta x_1 + k_f \Delta f.$$

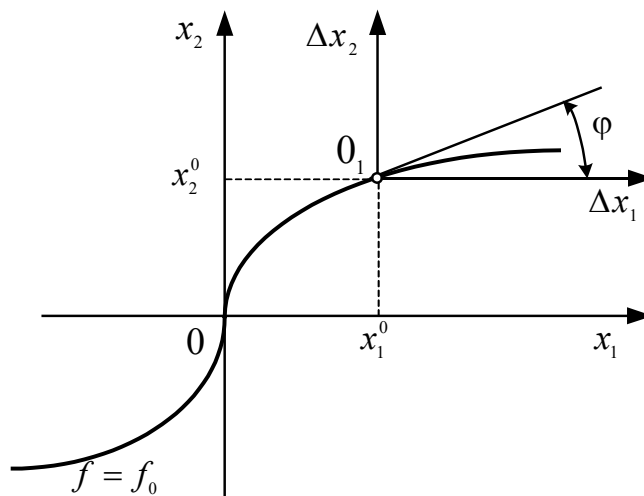
Ако се приеме, че $\Delta f = 0$ т. е. $f = f^0 = \text{const}$, тогава

$$\Delta x_2 = k \Delta x_1.$$

Това е линейно уравнение, а стойностите на променливите x_1 и x_2 в разглеждания режим са свързани с нелинейното уравнение

$$F(0, x_2, x_1, f^0) = 0. \quad (5.19)$$

Може да се даде проста геометрична интерпретация на линеаризацията – фиг. 5.5. Уравнението (5.19) в равнината на координатите x_1 и x_2 определя статичната характеристика – кривата на фиг. 5.5.



Фиг. 5.5. Геометричен смисъл на линеаризацията

Избора на изходен режим при линеаризацията съответства на избора на точка 0_1 с координати (x_1^0, x_2^0) . Прехода от пълните стойности на координатите x_1, x_2 в отклоненията $\Delta x_1, \Delta x_2$ геометрично означава пренос на координатната система от точка 0 в точка 0_1 .

В координатите $\Delta x_1, \Delta x_2$ уравнението $\Delta x_2 = \kappa \Delta x_1$ е права с ъглов коефициент

$$\kappa = \frac{b_0}{c_1} = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0}{\left(\frac{\partial F}{\partial f} \right)^0}. \quad (5.20)$$

Геометричния смисъл на линеаризацията е, че реалната статична характеристика на звеното се заменени с права допирателна към нея, през т. 0_1 , съответстваща на изходния режим на линеаризацията.

Колкото са по-малки отклоненията, толкова по точна е апроксимацията на кривата линия с права. Ъгловия коефициент може да се определи графоаналитично със зависимостта:

$$k = m \operatorname{tg} \varphi, \quad (5.21)$$

където, m - коефициент отчитащ мащабите по координатните оси.

За уравнение от втори ред $F(\ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2, \dot{x}_1, x_1, \dot{f}, f) = 0$ линеаризираното уравнение ще има вида:

$$\begin{aligned} F(.) = F(0, 0, x_2^0, 0, x_1^0, 0, f^0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} \right)^0 \Delta \ddot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^0 \Delta x_2 + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right)^0 \Delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}} \right)^0 \Delta \dot{f} + \left(\frac{\partial F}{\partial f} \right)^0 \Delta f = 0; \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{x}_2 &= \ddot{x}_2 - \ddot{x}_2^0 & \Delta \dot{x}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_1^0 \\ \Delta \dot{x}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_2^0 & \Delta x_1 &= x_1 - x_{1_0}; \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_{2_0} & \Delta \dot{f} &= \dot{f} - \dot{f}_0 \\ & & \Delta f &= f - f_0 \end{aligned}$$

статична характеристика изходни уравнения:

$$F(0, 0, x_2^0, 0, x_1^0, 0, f^0) = 0. \quad (5.23)$$

Полага се:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2}\right)^0 &= c_0; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 = c_1; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 = c_2 \\ -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 &= b_0; \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 = b_1; \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)^0 = r_0; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)^0 = r_1. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Символичния запис се получава

$$c_0 \Delta \ddot{x}_2 + c_1 \Delta \dot{x}_2 + c_2 \Delta x_2 = b_0 \Delta \dot{x}_1 + b_1 \Delta x_1 + r_0 \Delta \dot{f} + r_1 \Delta f \quad (5.25)$$

$$(c_0 p^2 + c_1 p + c_2) \Delta x_2 = (p b_0 + b_1) \Delta x_1 + (r_0 p + r_1) \Delta f \quad (5.26)$$

където

$$c(p) = (c_0 p^2 + c_1 p + c_2)$$

$$b(p) = (p b_0 + b_1)$$

$$r(p) = (r_0 p + r_1)$$

Разделят се двете страни на уравнението на c_2

$$\left(\frac{c_0}{c_2} p^2 + \frac{c_1}{c_2} p + 1\right) \Delta x_2 = \frac{b_1}{c_2} \left(p \frac{b_0}{b_1} + 1\right) \Delta x_1 + \frac{r_1}{c_2} \left(p \frac{r_0}{r_1} + 1\right) \Delta f \quad (5.27)$$

и уравнението добива вида

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) \Delta x_2 = k(p\tau + 1) \Delta x_1 + k_f(\tau_f p + 1) \Delta f \quad (5.28)$$

където,

$$T = \sqrt{\frac{c_0}{c_2}}; \quad \xi = \frac{c_1}{2\sqrt{c_0 c_2}}; \quad k = \frac{b_1}{c_2}; \quad k_f = \frac{r_1}{c_2}; \quad \tau = \frac{b_0}{b_1}; \quad \tau_f = \frac{r_0}{r_1}.$$

$$[T] = [\tau] = [\tau_f] = [\text{sec}]; \quad - \text{наричат се времеконстанти и имат размерност на}$$

време.

$\xi = 1$; коефициент на демпфериране, безразмерен

$$[k] = \frac{[x_2]}{[x_1]}; \quad k_f = \frac{[x_2]}{[f]}.$$

За уравнение от произволен ред:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_2^{(n-k)}} \right)^0 \Delta x_2^{(n-k)} + \sum_{k=0}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_1^{(m-k)}} \right)^0 \Delta x_1^{(m-k)} + \sum_{k=0}^q \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(q-k)}} \right)^0 \Delta f^{(q-k)} = 0. \quad (5.29)$$

Означава се:

$$c_k = \left(\frac{\partial F}{\partial x_2^{(n-k)}} \right)^0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n;$$

$$b_k = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1^{(m-k)}} \right)^0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, m;$$

$$r_k = - \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(q-k)}} \right)^0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, q.$$

Диференциалното уравнение се записва:

$$\begin{aligned} c_0 \frac{d^n \Delta x_2}{dt^n} + c_1 \frac{d^{n-1} \Delta x_2}{dt^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-2} \Delta x_2}{dt^{n-2}} + \dots + c_{n-1} \frac{d \Delta x_2}{dt} + c_n \Delta x_2 = \\ = b_0 \frac{d^m \Delta x_1}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} \Delta x_1}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d \Delta x_1}{dt} + b_m \Delta x_1 + r_0 \frac{d^q \Delta f}{dt^q} + r_1 \frac{d^{q-1} \Delta f}{dt^{q-1}} + \dots + r_{q-1} \frac{d \Delta f}{dt} + r_q \Delta f \end{aligned}$$

Уравнението в символичен вид се записва:

$$\begin{aligned} (c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + c_2 p^{n-2} + \dots + c_{n-1} p + c_n) \Delta x_2 = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \Delta x_1 + (r_0 p^q + r_1 p^{q-1} + \dots + r_{q-1} p + r_q) \Delta f. \quad (5.30) \end{aligned}$$

Може да се въведат символични полиноми:

$$c(p) = (c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n);$$

$$b(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m);$$

$$r(p) = (r_0 p^q + r_1 p^{q-1} + \dots + r_{q-1} p + r_q);$$

ИЛИ

$$c(p) \Delta x_2 = b(p) \Delta x_1 + r(p) \Delta f. \quad (5.31)$$

Ако на звеното действат няколко смущения $f_1, f_2, \dots, f_N$

$$c(p)\Delta x_2 = b(p)\Delta x_1 + \sum_{k=1}^N r_k(p)\Delta f_k ; \quad (5.32)$$

$$r_k(p) = r_{k_0} p^{q_k} + r_{k_1} p^{q_{k-1}} + \dots + r_{k_{q_k}} . \quad (5.33)$$

Ако не отчитаме смущенията диференциалното уравнение в символичен вид се записва:

$$c(p)\Delta x_2 = b(p)\Delta x_1, \quad (5.34)$$

или в развит вид:

$$(c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_m p + c_n)\Delta x_2 = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m)\Delta x_1. \quad (5.35)$$

По нататък ще се изпуска символа Δ пред означението на входните или изходните величини, но не трябва да се забравя, че величините са отклонения, а не действителни координати.

5.5. Привеждане на диференциалните уравнения в безразмерна форма

Много често диференциалните уравнения се привеждат в безразмерна форма, при което реалните физични променливи x_1, x_2, f или техните отклонения $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta f$ се заместват с безразмерни величини. Като се въведат базови променливи /мащаби/ x_1^*, x_2^*, f^* се получават съотношенията:

$$\Delta x_1 = \bar{x}_1 x_1^* ;$$

$$\Delta x_2 = \bar{x}_2 x_2^* ;$$

$$\Delta f = \bar{f} f^* .$$

Като се заместят тези в диференциалното уравнение в символичен вид се записва:

$$\begin{aligned} & (c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + c_2 p^{n-2} + \dots c_{n-1} p + c_n) \bar{x}_2 = \\ & = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \bar{x}_1 \frac{x_1^*}{x_2^*} + (r_0 p^q + r_1 p^{q-1} + \dots + r_{q-1} p + r_q) \bar{f} \frac{f^*}{x_2^*} \end{aligned}$$

Получава се:

$$(c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + c_2 p^{n-2} + \dots c_{n-1} p + c_n) \bar{x}_2 =$$

$$= k \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m \right) \bar{x}_1 + k_f \left(r_0 p^q + r_1 p^{q-1} + \dots + r_{q-1} p + r_q \right) \bar{f} \quad (5.36)$$

където,

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{f}$ - са новите безразмерни променливи;

$k = \frac{x_1^*}{x_2^*}$ статичен коефициент на усилване;

$k_f = \frac{f^*}{x_2^*}$ - статичен коефициент на усилване по смущение.

Следващата операция се извършва като уравнението се привежда в стандартна форма:

$$\begin{aligned} & \left(C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + C_2 p^{n-2} + \dots + C_{n-1} p + 1 \right) \bar{x}_2 = \\ & = k \left(B_0 p^m + B_1 p^{m-1} + \dots + B_{m-1} p + 1 \right) \bar{x}_1 + k_f \left(R_0 p^q + R_1 p^{q-1} + \dots + R_{q-1} p + 1 \right) \bar{f}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

където

$$C_i = \frac{c_i}{c_n} ; B_i = \frac{b_i}{b_m} ; R_i = \frac{r_i}{r_q} ;$$

$$\bar{k} = \frac{b_m}{c_n} \frac{x_1^*}{x_2^*} ;$$

$$\bar{k}_f = \frac{r_q}{c_n} \frac{f^*}{x_2^*} .$$

Като се въведат символичните полиноми:

$$C(p) = (C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + \dots + C_{n-1} p + 1); \quad (5.38)$$

$$B(p) = (B_0 p^m + B_1 p^{m-1} \dots + B_{m-1} p + 1); \quad (5.39)$$

$$R(p) = (R_0 p^q + R_1 p^{q-1} \dots + R_{q-1} p + 1); \quad (5.40)$$

или

$$C(p) \bar{x}_2 = \bar{k} B(p) \bar{x}_1 + \bar{k}_f R(p) \bar{f}. \quad (5.41)$$

При отсъствие на смущаващи въздействия уравнението добива вида:

$$C(p)\bar{x}_2 = k B(p)\bar{x}_1. \quad (5.42)$$

Трябва да се отбележи, че базисните стойности x_1^*, x_2^*, f^* не влияят на коефициентите на диференциалното уравнение, а изменят само статичните коефициенти на усилване

$$\bar{k} = \frac{b_m}{c_n} \frac{x_1^*}{x_2^*};$$

$$\bar{k}_f = \frac{r_q}{c_n} \frac{f^*}{x_2^*}.$$

При този запис на диференциалното уравнение, коефициентите пред всяка производна имат размерност на време на степен, равна на реда на производната. Пред първата производна коефициентът има размерност секунда $[s]$, пред втората производна - $[s^2]$, пред третата - $[s^3]$ и т.н.

Много често, особено при висок ред на диференциалните уравнения, стойностите на коефициентите C_i , B_i и R_i се различават с повече от няколко порядъка, което силно затруднява последващия анализ. Това налага извършването на нормализация чрез изменение на мащаба на времето. Новата променлива /относително време/

$$\bar{t} = \frac{t}{m_t}, \quad (5.43)$$

се избира така, че коефициента пред старшата производна да е равен на единица. От тук за мащаба на времето се получава:

$$m_t = \sqrt[n]{C_0} = \sqrt[n]{\frac{c_0}{c_n}}. \quad (5.44)$$

Уравнението добива окончателен вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d^n \bar{x}_2}{d\bar{t}^n} + \bar{C}_1 \frac{d^{n-1} \bar{x}_2}{d\bar{t}^{n-1}} + \bar{C}_2 \frac{d^{n-2} \bar{x}_2}{d\bar{t}^{n-2}} + \dots + \bar{C}_{n-1} \frac{d\bar{x}_2}{d\bar{t}} + \bar{x}_2 = \\ & = \bar{k} \left(\bar{B}_0 \frac{d^m \bar{x}_1}{d\bar{t}^m} + \bar{B}_1 \frac{d^{m-1} \bar{x}_1}{d\bar{t}^{m-1}} + \dots + \bar{B}_{m-1} \frac{d\bar{x}_1}{d\bar{t}} + \bar{x}_1 \right) + \bar{k}_f \left(\bar{R}_0 \frac{d^q \bar{f}}{d\bar{t}^q} + \bar{R}_1 \frac{d^{q-1} \bar{f}}{d\bar{t}^{q-1}} + \dots + \bar{R}_{q-1} \frac{d\bar{f}}{d\bar{t}} + \bar{f} \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

където,

$$\bar{C}_i = \frac{C_i}{m_t^{(n-i)}} ; \bar{B}_i = \frac{B_i}{m_t^{(m-i)}} ; \bar{R}_i = \frac{R_i}{m_t^{(q-i)}} ,$$

или като се положи $p = \frac{d}{d\bar{t}}$,

се получава символичния вид на нормализираното уравнение

$$\begin{aligned} (p^n + \bar{C}_1 p^{n-1} + \bar{C}_2 p^{n-2} + \dots + \bar{C}_{n-1} p + 1) \bar{x}_2 = \\ = \bar{k} (\bar{B}_0 p^m + \bar{B}_1 p^{m-1} + \dots + \bar{B}_{m-1} p + 1) \bar{x}_1 + \bar{k}_f (\bar{R}_0 p^q + \bar{R}_1 p^{q-1} + \dots + \bar{R}_{q-1} p + 1) \bar{f} . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Като се въведат символичните полиноми:

$$\begin{aligned} \bar{C}(p) &= (p^n + \bar{C}_1 p^{n-1} + \dots + \bar{C}_{n-1} p + 1) \\ \bar{B}(p) &= (\bar{B}_0 p^m + \bar{B}_1 p^{m-1} \dots + \bar{B}_{m-1} p + 1) \\ \bar{R}(p) &= (\bar{R}_0 p^q + \bar{R}_1 p^{q-1} \dots + \bar{R}_{q-1} p + 1) \end{aligned}$$

или

$$\bar{C}(p) \bar{x}_2 = \bar{k} \bar{B}(p) \bar{x}_1 + \bar{k}_f \bar{R}(p) \bar{f} \quad (5.47)$$

При отсъствие на смущение

$$\begin{aligned} \frac{d^n \bar{x}_2}{d\bar{t}^n} + \bar{C}_1 \frac{d^{n-1} \bar{x}_2}{d\bar{t}^{n-1}} + \bar{C}_2 \frac{d^{n-2} \bar{x}_2}{d\bar{t}^{n-2}} + \dots + \bar{C}_{n-1} \frac{d \bar{x}_2}{d\bar{t}} + \bar{x}_2 = \\ = \bar{k} \left(\bar{B}_0 \frac{d^m \bar{x}_1}{d\bar{t}^m} + \bar{B}_1 \frac{d^{m-1} \bar{x}_1}{d\bar{t}^{m-1}} + \dots + \bar{B}_{m-1} \frac{d \bar{x}_1}{d\bar{t}} + \bar{x}_1 \right) . \end{aligned} \quad (5.48)$$

В символичен вид:

$$\begin{aligned} (p^n + \bar{C}_1 p^{n-1} + \bar{C}_2 p^{n-2} + \dots + \bar{C}_{n-1} p + 1) \bar{x}_2 = \bar{k} (\bar{B}_0 p^m + \bar{B}_1 p^{m-1} + \dots + \bar{B}_{m-1} p + 1) \bar{x}_1 \\ \bar{C}(p) \bar{x}_2 = \bar{k} \bar{B}(p) \bar{x}_1 . \end{aligned} \quad (5.49)$$

При този запис на диференциалното уравнение, времето както и другите променливи е приведено в безразмерен вид.

Уравненията в относителни единици с безразмерно време обикновено се използват при моделиране на процесите, когато се налага да се измени мащаба на времето на процеса, за да се приспособи към моделиращата система.

В класическата теория на автоматичното регулиране обикновено се използва само формата с относителни единици, в която времето не се привежда в относителни единици.

5.6. Примери за съставяне на диференциалните уравнения на динамични звена.

Пример за нелинейна функция може да служи зависимостта между обемния дебит Q_d и пада на налягане p_d в хидравличен турбулентен дросел - фиг. 5.6.

$$Q_d = \mu_d f_d \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}, \quad (5.50)$$

където,

μ_d - коефициент на дебита;

f_d - площ на проходното сечение;

ρ - плътност на течността.

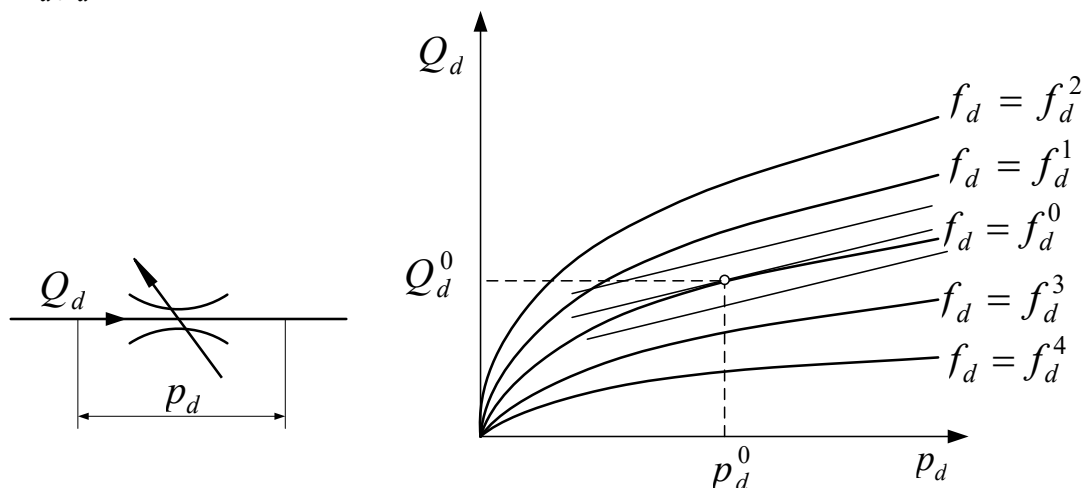
Обикновено хидравличните дросели са елементи от различни системи и при регулиране хидродинамичните процеси площта на проходното сечение f_d и пада на налягане p_d са променливи във времето величини $f_d = f_d(t)$; $p_d = p_d(t)$.

Зависимостта (5.76) може да се представи във вида:

$$Q_d = \frac{\sqrt{p_d}}{R_d} \quad (5.51)$$

където,

$$R_d = \frac{1}{\mu_d f_d} \sqrt{\frac{\rho}{2}} - \text{съпротивлението на дросела.}$$



Фиг. 5.6. Линеаризация на характеристиката на хидравличен дросел

Избира се точка за линеаризация /обикновено това е номиналният режим на работа на дросела/ $f_d = f_d^0$; $p_d = p_d^0$; $Q_d = Q_d^0$ и се въвеждат отклоненията

$$Q_d = \Delta Q_d + Q_d^0$$

$$p_d = \Delta p_d + p_d^0$$

$$R_d = \Delta R_d + R_d^0$$

Разлага се уравнението (5.77) в ред на Тейлор

$$Q_d = Q_d^0 + \left. \frac{\partial Q_d}{\partial R_d} \right|_0 \Delta R_d + \left. \frac{\partial Q_d}{\partial p_d} \right|_0 \Delta p_d$$

където,

$$Q_d^0 = \mu_d f_d^0 \sqrt{\frac{2p_d^0}{\rho}} = \frac{\sqrt{p_d^0}}{R_d^0} \text{ е дебитът, съответстващ на избраната точка за}$$

линеаризация.

$$Q_d = Q_d^0 - \frac{\sqrt{p_d^0}}{(R_d^0)^2} \Delta R_d + \frac{1}{2R_d^0 \sqrt{p_d^0}} \Delta p_d,$$

или

$$\Delta Q_d^0 = Q_d - Q_d^0 = -\frac{\sqrt{p_d^0}}{(R_d^0)^2} \Delta R_d + \frac{1}{2R_d^0 \sqrt{p_d^0}} \Delta p_d \quad (5.52)$$

$$\Delta Q_d^0 = -k_R \Delta R_d + k_p \Delta p_d,$$

където,

$$\left. \frac{\partial Q_d}{\partial R_d} \right|_0 = -\frac{\sqrt{p_d^0}}{(R_d^0)^2} = k_R; \quad \left. \frac{\partial Q_d}{\partial p_d} \right|_0 = \frac{1}{2R_d^0 \sqrt{p_d^0}} = k_p.$$

Уравнението (5.78) съответства на успоредни наклонени прави линии, които се допират до статичните характеристики в околността на точките на линеаризация. При постоянна площ на напречното сечение /нерегулируем дросел/ уравнението добива вида:

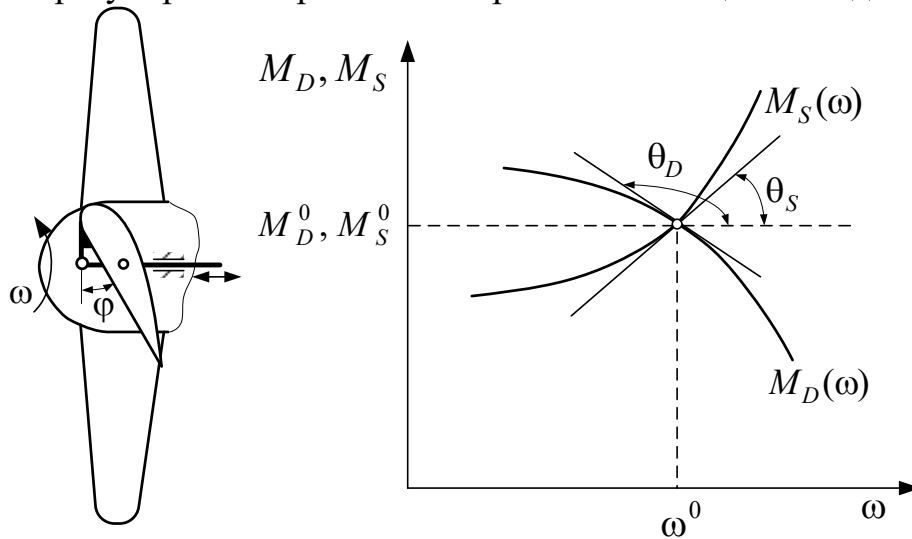
$$\Delta Q_d = k_p \Delta p_d = \frac{\mu_d f_d^0}{\sqrt{2\rho p_d^0}} \Delta p_d.$$

За да се обезразмери уравнението се полага $\Delta Q_d = \bar{Q}_d Q_d^0$ и $\Delta p_d = \bar{p}_d p_d^0$.

Безразмерното уравнение има вида

$$\bar{Q}_d = \bar{k}_p \bar{p}_d = \frac{\mu_d f_d^0}{Q_d^0} \sqrt{\frac{p_d^0}{2\rho}} \bar{p}_d. \quad (5.53)$$

Друг пример е авиационен двигател с винт с променлива стъпка – фиг. 5.7. Означава се с φ – ъгъла на завъртане на лопатката на винта, променящ се промяната на режима на работа на двигателя и с ω – ъгловата скорост на въртене на винта /изходния вал на двигателя. Трябва да се получи математичния модел на двигателя, като обект на регулиране, влизащ в системата за автоматично регулиране скоростта на въртене на авиационния двигател.



Фиг. 5.7. Към извода на уравнението за авиационен двигател с винт
а – схема, б – характеристики на двигателния и съпротивителен момент

Предполага се, че управлението на скоростта на въртене на винта се осъществява за сметка на изменение на съпротивителния момент при завъртане на лопатките на винта, а разхода на гориво е постоянен. Избира се начало на отчитане на променливите установената стойност на скоростта на въртене $\omega = \omega^0$.

Равновесното състояние се описва от уравнението:

$$M_D^0(\omega^0) - M_S^0(\omega^0, \varphi^0) = 0,$$

$M_D^0(\omega^0)$ - момент развиван от двигателя,

$M_S^0(\omega^0, \varphi^0)$ -съпротивителен момент на вала на двигателя.

Уравнението на движение, според закона на Нютон се записва:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_D(\omega) - M_S(\omega, \varphi). \quad (5.54)$$

J - инерционен момент на вала на двигателя

Полага се:

$$\omega = \omega^0 + \Delta\omega; \quad M_S = M_S^0 + \Delta M_S; \quad M_D = M_D^0 + \Delta M_D.$$

Замества се в уравнението на движение и се получава:

$$J \frac{d(\omega^0 + \Delta\omega)}{dt} = M_D^0 + \Delta M_D - M_S - M_S^0 \quad (5.55).$$

Линеаризираното уравнение се получава като се извади уравнението (5.54) от уравнение (5.55)

$$J \frac{d(\Delta\omega)}{dt} = \Delta M_D(\omega) - \Delta M_S(\omega, \varphi); \quad (5.56)$$

Като се замести в уравнение (5.56)

$$\Delta M_D(\omega) = \left. \frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right|_0 \Delta\omega;$$
$$\Delta M_S(\omega) = \left. \frac{\partial M_S}{\partial \omega} \right|_0 \Delta\omega + \left. \frac{\partial M_S}{\partial \varphi} \right|_0 \Delta\varphi,$$

се получава:

$$J \frac{d(\Delta\omega)}{dt} + \left[\left(\left. \frac{\partial M_S}{\partial \omega} \right|_0 \right) - \left(\left. \frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right|_0 \right) \right] \Delta\omega = - \left(\left. \frac{\partial M_S}{\partial \varphi} \right|_0 \right) \Delta\varphi. \quad (5.57)$$

Уравнението (5.57) е линейно уравнение в първо приближение в абсолютни величини. Всички членове имат размерност на момент.

Разделят се всички членове на големината на номиналния момент на двигателя M_N , като се въвеждат относителни отклонения:

$$x_2 = \frac{\Delta\omega}{\omega^0} \text{ - изходна координата;}$$

$$x_1 = \frac{\Delta\varphi}{\varphi^0} \text{ - входна координата;}$$

$$T_0 = J \frac{\omega^0}{M_N} \text{ - времекоэффициент на развъртане;}$$

$$k_c = \left[\left(\frac{\partial M_s}{\partial \omega} \right)^0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)^0 \right] \frac{\omega^0}{M_N} - \text{коэффициент на саморегулиране};$$

$$k_u = \left(\frac{\partial M_s}{\partial \omega} \right)^0 \frac{\varphi^0}{M_N} - \text{коэффициент на регулиращото въздействие}.$$

Уравнението (5.57) се преобразува във вида:

$$T_0 \frac{dx_2}{dt} + k_c x_2 = -k_u x_1 \quad (5.58)$$

Прехода към безразмерно време, може да се направи като се представи първия член на диференциалното уравнение (5.83) в следния вид:

$$T_0 \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{d \frac{t}{T_0}} = \frac{dx_2}{d\tau},$$

където $\tau = \frac{t}{T_0}$.

При това преобразование се получава безразмерен коефициент при първия член на диференциалното уравнение, в случая единица и се преминава към безразмерното време τ . Диференциалното уравнение приема вида:

$$\frac{dx_2}{d\tau} + k_c x_2 = -k_u x_1. \quad (5.59)$$

ГЛАВА 6.

ПРЕДАВАТЕЛНИ ФУНКЦИИ НА ЛИНЕЙНИ ЗВЕНА. СВЪРЗВАНЕ НА ЗВЕНАТА В СИСТЕМИТЕ

6.1. Предавателни функции на линейни динамични звена

Разглежда се динамично звено, работата на което се описва с линейно диференциално уравнение:

$$c(p)x_2 = b(p)x_1 + r(p)f(t), \quad (6.1)$$

където:

$$c(p) = b_0 p^n + c_{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n, \quad (6.2)$$

$$b(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} \dots + b_{m-1} p + b_m, \quad (6.3)$$

$$r(p) = r_0 p^q + r_1 p^{q-1} + \dots + r_{q-1} p + r_q, \quad (6.4)$$

c_i, b_i, r_i - реални числа, n, m, q - цели положителни числа и $m \leq n, n \leq q$.

Уравнението (6.1) позволява да се намери реакцията на звено $x_2(t)$ на произволни входни сигнали $x_1(t)$ и смущения $f(t)$. За това е необходимо да се знаят законите на изменение на външните въздействия $x_1(t)$ и $f(t)$ както и началните условия, характеризиращи състоянието на динамичното звено в момента от време $t = 0$:

$$x_2(0) = x_{20}, \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}, \dots, x_2^{(n)}(0) = x_{20}^{(n)}. \quad (6.5)$$

Ако при $t = 0$ звеното се намира в някой, то

$$x_2(0) = \dot{x}_2(0) = \ddot{x}_2(0) = \dots = x_2^{(n)}(0) = 0 \quad (6.6)$$

Това са така наречените нулеви начални условия.

За описание на динамиката на звеното освен диференциални уравнения се използват и т.нар. предавателни функции, временни и честотни характеристики, които се различават от диференциалните уравнения с по-голяма нагледност и възможност за експериментално определяне /за временните и честотните характеристики/.

Предавателната функция на звеното по каквото и да е външно въздействие се нарича отношението на операторния образ /по Лапас/ на изходната величина към операторния образ на разглежданото входно (външно) въздействие. При това всички останали външни въздействия се

полагат равни на нула, а Лапласовите образи /на входната величина и външното въздействие/ се изчисляват при нулеви начални стойности на функциите и техните производни.

За звено с една изходна величина, броя на предавателните функции е равен на броя на външните въздействия.

Предавателна функция по входна величина:

$$W(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)}. \quad (6.7)$$

Предавателна функция по смущение:

$$W_f(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)}. \quad (6.8)$$

където, s - оператор на Лаплас, комплексна променлива, а

$$X_2(s) = L\{x_2(t)\} = \int_{\gamma}^{\infty} x_2(t) e^{-st} dt, \quad (6.9)$$

$$X_1(s) = L\{x_1(t)\} = \int_{\gamma}^{\infty} x_1(t) e^{-st} dt, \quad (6.10)$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{\gamma}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (6.11)$$

са преобразуваните по Лаплас съответни функции на времето.

$W(s)$ се нарича се основна предавателна функция, или само предавателна функция.

При изчисляване на изображенията се считат за изпълнени следните съотношения:

$$x_2(0) = \dot{x}_2(0) = \ddot{x}_2(0) = \dots = x_2^{(n)}(0) = 0, \quad (6.12)$$

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \ddot{x}_1(0) = \dots = x_1^{(m)}(0) = 0, \quad (6.13)$$

$$f(0) = \dot{f}(0) = \ddot{f}(0) = \dots = f^{(q)}(0) = 0. \quad (6.14)$$

Предавателните функции могат да се определят непосредствено от диференциалното уравнение на звеното $c(p)x_2 = b(p)x_1 + r(p)f$. Преобразува се това уравнение по Лаплас

$$c_0 L\{p^n x_2(t)\} + c_1 L\{p^{n-1} x_2(t)\} + \dots c_n L\{x_2(t)\} = b_0 L\{p^m x_1(t)\} + \dots b_m L\{x_1(t)\} + r_0 L\{p^q f(t)\} + r_1 L\{p^{q-1} f(t)\} + \dots r_q L\{f(t)\} \quad (6.15)$$

Според теоремата за изображението на производната

$$L\{p^k x_2(t)\} = s^k X_2(s) \quad k = 0, 1, 2 \dots n;$$

$$L\{p^k x_1(t)\} = s^k X_1(s) \quad k = 0, 1, 2 \dots m;$$

$$L\{p^k f(t)\} = s^k F_1(s) \quad k = 0, 1, 2 \dots q.$$

Уравнението добива вида:

$$c_0 s^n X_2(s) + c_1 s^{n-1} X_2(s) + \dots c_n X_2(s) = b_0 s^m X_1(s) + b_1 s^{m-1} X_1(s) \dots b_m X_1(s) + r_0 s^q F(s) + r_1 s^{q-1} F(s) + \dots r_q F(s),$$

или

$$(c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n) X_2(s) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) X_1(s) + (r_0 p^q + r_1 p^{q-1} + \dots + r_{q-1} p + r_q) F(s)$$

Преминава се към вида

$$\Rightarrow c(s) X_2(s) = b(s) X_1(s) + r(s) F(s), \quad (6.16)$$

където

$$c(s) = s(p) \Big|_{p=s} = c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1} s + c_n; \quad (6.17)$$

$$b(s) = b(p) \Big|_{p=s} = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m, \quad (6.18)$$

$$r(s) = r(p) \Big|_{p=s} = r_0 s^q + r_1 s^{q-1} + \dots + r_{q-1} s + r_q. \quad (6.19)$$

Уравнението (6.16) е алгебрично уравнение относно изображението $X_2(s)$ и се нарича *уравнение на динамичното звено на изображения при нулеви начални условия*. То може да се получи от диференциалното уравнение на звеното като формално се замени символа за диференциране p с комплексната променлива

s - полага се $p = s$ и функциите на времето с техните изображения $x_2(t) \rightarrow X(s)$
 $x_1(t) \rightarrow X_1(s)$ $f(t) \rightarrow F(s)$.

Като се реши уравнението (6.16) относно изображението на изходната величина се получава

$$X_2(s) = \frac{b(s)}{c(s)} X_1(s) + \frac{r(s)}{c(s)} F(s). \quad (6.20)$$

При $F(s) = 0$ може да се определи предавателната функция

$$\Rightarrow X_2(s) = \frac{b(s)}{c(s)} X_1(s) \Rightarrow W(s) = \frac{b(s)}{c(s)},$$

$$W(s) = \frac{b(s)}{c(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1} s + c_n}. \quad (6.21)$$

При полагане $X_1(s) = 0$ ще получи предавателната функция по смущение

$$W_f(s) = \frac{r(s)}{c(s)} = \frac{r_0 s^q + r_1 s^{q-1} + \dots + r_{q-1} s + r_q}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1} s + c_n}. \quad (6.22)$$

Следователно за да се определи предварителната функция на звеното е необходимо:

- а) да се запише диференциалното уравнение в символичен вид
- б) да се раздели многочлена (полинома) стоящ в дясната част на диференциалното уравнение, който описва интересуващото ни външно въздействие, на множителя в лявата част на диференциалното уравнение.
- в) в получения резултат да се замени p с s .

При използване на диференциални уравнения в безразмерен вид, съответните предавателни функции имат вида:

$$W(s) = \bar{k} \frac{B(s)}{C(s)} = \bar{k} \frac{(B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_{m-1} s + 1)}{(C_0 s^n + C_1 s^{n-1} + \dots + C_{n-1} s + 1)}. \quad (6.23)$$

Ако се положи $X_1(s) = 0$ ще получи предавателната функция по смущение

$$W_f(s) = \bar{k}_f \frac{r(s)}{c(s)} = \bar{k}_f \frac{(R_0 s^q + R_1 s^{q-1} + \dots + R_{q-1} s + 1)}{(C_0 s^n + C_1 s^{n-1} + \dots + C_{n-1} s + 1)}. \quad (6.24)$$

За звено, описвано от диференциалното уравнение от първи ред, съответните предавателни функции са:

$$W(s) = \frac{k}{(Ts+1)} \text{ и } W_f(s) = \frac{k_f}{(Ts+1)} \quad (6.25)$$

За звено, описвано от ДУ от втори ред, съответните предавателни функции са:

$$W(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)} \text{ и } W(s) = \frac{k_f(\tau_f s + 1)}{(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)}. \quad (6.26)$$

За динамични звена, за които характеристичното уравнение има нулеви корени, предавателната функция има вида:

$$W(s) = \frac{k_v B(s)}{s^v C_{s-v}(s)} = \frac{k_v (B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_{m-1} s + 1)}{s^v (C_0 s^{n-v} + c_1 s^{n-v-1} + \dots + C_{n-1} s + 1)}. \quad (6.27)$$

където броя на нулевите корени е v , и се нарича степен на астатизма.

При извода на уравненията (6.21) и (6.22) конкретния вид на функциите $x_1(s)$ и $f(s)$ не се разглежда. **Предавателната функция на линейните звена по произволно входно въздействие не зависи от закона за изменение на това въздействие, а се определя само от свойствата на самото звено.**

Уравненията (6.21) и (6.22) показват, че предавателните функции на линейните звена за дробно рационални функции на комплексната променлива s , числителя и знаменателя на които представляват полиноми на s с реални коефициенти, зависещи от параметрите на звеното. Като правило, в предавателните функции на звената степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя $m \leq n, q \leq n$ и предавателните функции са правилни дробно-рационални изрази на променливата s .

Полиномът в знаменателя на предавателната функция $c(s)$ се нарича характеристичен полином, а уравнението

$$c(s) = 0, \quad (6.27)$$

се нарича характеристично уравнение.

За диференциално уравнение от “ n ” ред, характеристичното уравнение е алгебрично уравнение от “ n ” –ти ред и има корени: $s_1, s_2, \dots, s_n$ които могат да са реални и комплексно спрегнати.

Корените на полинома в знаменателя на предавателната функция /характеристичното уравнение/ се наричат *полюси* на предавателната функция, корените в числителя на предавателната функция – *нули* на предавателната функция.

Полиномите $b(s)$ и $c(s)$ могат да се представят във вида

$$c(x) = c_0(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (6.28)$$

$$b = b_0(s - s_1^0)(s - s_2^0) \dots (s - s_n^0) \quad (6.29)$$

където $s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0$ са корени на полинома $b(s)$.

Предавателната функция може да се запише във вида:

$$W(s) = \frac{b_0}{c_0} \frac{(s - s_1^0)(s - s_2^0) \dots (s - s_n^0)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \quad (6.30)$$

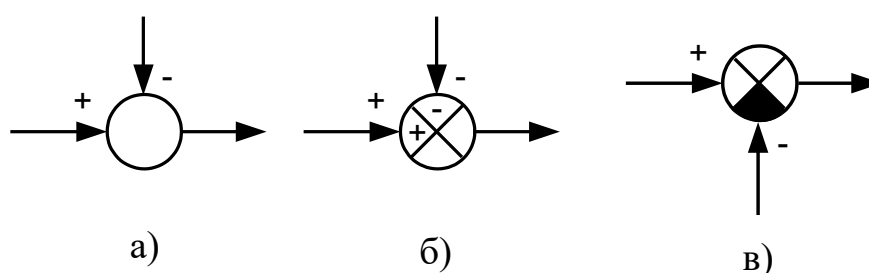
От предавателните функции на звеното по съответните входни въздействия може да се определи диференциалното уравнение на звеното.

6.2. Структурни схеми на автоматични системи

Често връзката между отделните звена в една автоматична система и съответните външни въздействия е удобно да се изобразяват в графичен вид, с така наречените структурни схеми. Структурна схема на САР се нарича схемата, която показва от какви звена се състои и как те са свързани помежду си. Те представляват графично изображение на уравненията, показващи връзката между входните и изходни променливи.

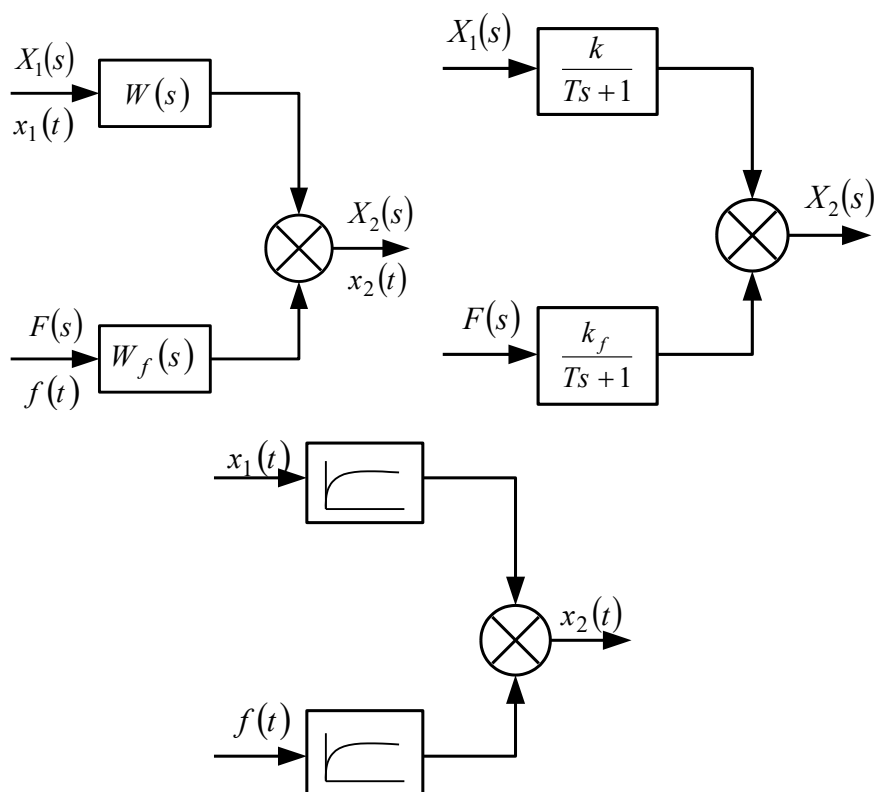
Наличността на структурна схема облекчава намирането на предавателната функция и диференциалното уравнение на системата, като динамичните характеристики на системата се определят както от динамичните характеристики на отделните елементи, така и от начина на свързване на звената в системата.

Динамичните звена в структурната схема се отбелязват с правоъгълници. Сигналите се изобразяват със прави линии със стрелки, показващи посоката на сигнала. В местата разклоняване на сигнала се поставя точка и се приема, че към всяко звено постъпва един и същ сигнал.



Фиг. 6.1. Означение на суматор в структура схема

Сумирането на сигналите се представя с кръгче, като се означава знака на сигнала. Означението на знака „плюс“ съответства на сумиране на сигналите, а знака „минус“ на изваждане на входните сигнали. На фиг. са показани най-често използваните графични символи на суматори.



Фиг. 6.2. Структурна схема на звено

Структурната схема се разглежда като схема на преминаване и преобразуване на сигналите. Отделните звена не е задължително да съответстват на определени конструктивни елементи на автоматичната система. Те изразяват части от системата, които се характеризират с определени преходни или предавателни функции. Точките на разклонение и възлите на сумирането на сигналите обикновено се разделят от отделни звена. Един конструктивен елемент от САР може да бъде представен от няколко типови звена, а понякога няколко елемента се обединяват в едно типово звено.

За съставяне на структурната схема на дадена автоматична система често се използва функционалната схема, като в нея най-напред се отбелязват връзките, по които сигналите могат да се разпространяват само в една посока. Звената се свързват по определен начин, като се поставят стрелки, показващи посоката на разпространение на сигналите. След това се намират връзките за обратно преминаване на сигналите, като също така се нанасят в структурната схема. Накрая в структурната схема се нанасят и смущаващите въздействия.

Ако на звената действат едно смущение и едно задаващо въздействие, то изображението на изходната величина се определя от:

$$X_2(s) = W(s) X_1(s) + W_f(s) F(s). \quad (6.31)$$

Съответната структурна схема е показана на фиг. 6.2.

Понякога в структурните схеми за входни и изходни величини условно се считат не изображенията им по Лаплас, а самите функции – оригинали. Това

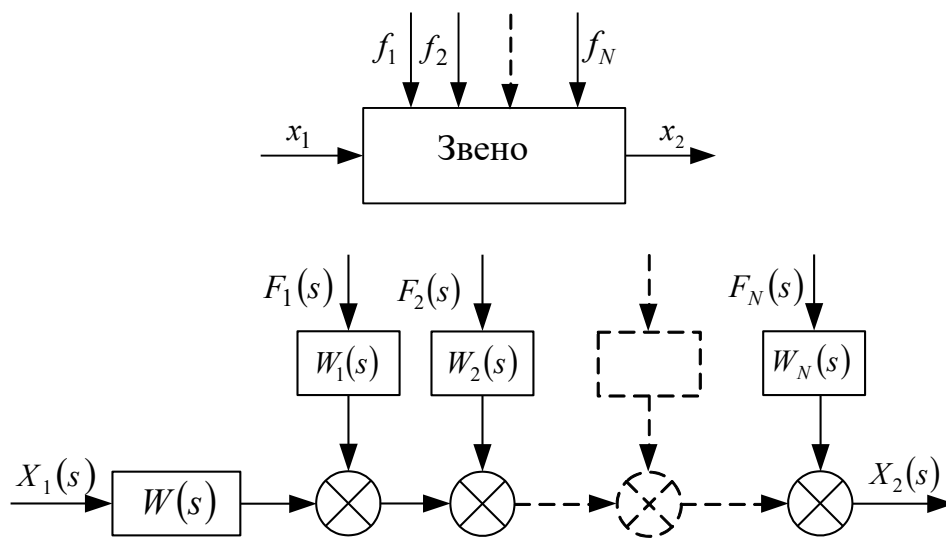
позволява да се нанасят в структурните схеми графиките на изменение във времето /преходните характеристики/ на входните и изходни величини.

Когато към звеното се подават повече смущаващи въздействия $f_1, f_2, \dots, f_N$, то изображението на изходната величина се представя във вида:

$$\Rightarrow X_2(s) = X_1(s) \cdot W(s) + \sum_{k=1}^N W_k(s) F_k(s) \quad (6.32)$$

където,

$$W_k(s) = \frac{X_2(s)}{F_k(s)} = \frac{r_k(s)}{c(s)} = \frac{r_{k0}s^{q_k} + r_{k1}s^{q_{k-1}} + \dots + r_{kq_k}}{c_0s^n + c_1s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s + s_n}. \quad (6.33)$$



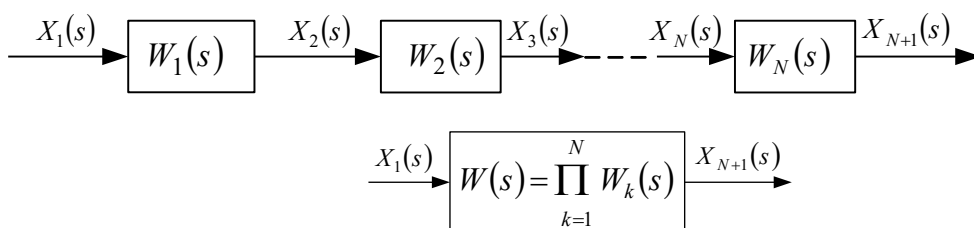
Фиг. 6.3. Звено с няколко смущаващи въздействия

6.3. Предавателна функция на основни съединения на линейните звена

Съществуват три основни типа свързване на динамичните звена

- 1) последователно;
- 2) паралелно;
- 3) съединение с обратна връзка

Последователно е такова свързване на две или няколко звена при което входната величина на предшестващото звено е входна за последващото – фиг. 6.4:



Фиг. 6.4. Последователно свързване на динамични звена

Като се използват предавателните функции на отделните динамични звена може да се запише:

$$W_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \quad W_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)} \cdots W_k(s) = \frac{X_{k+1}(s)}{X_k(s)} \cdots W_N(s) = \frac{X_{N+1}(s)}{X_N(s)}. \quad (6.34)$$

$k = 1, 2 \dots N$.

Като се използват връзките:

$$X_2(s) = X_1(s) W_1(s), \quad (6.35)$$

$$X_3(s) = X_2(s) W_2(s), \quad (6.36)$$

$$X_{k+1}(s) = X_k(s) W_k(s), \quad (6.37)$$

$$X_{N+1}(s) = X_N(s) W_N(s), \quad (6.38)$$

и се заместят последователно (6.35) - (6.37) в (6.38) ще се получи

$$X_{N+1}(s) = X_1(s) W_1(s) W_2(s) \dots W_N(s) \quad (6.39)$$

или

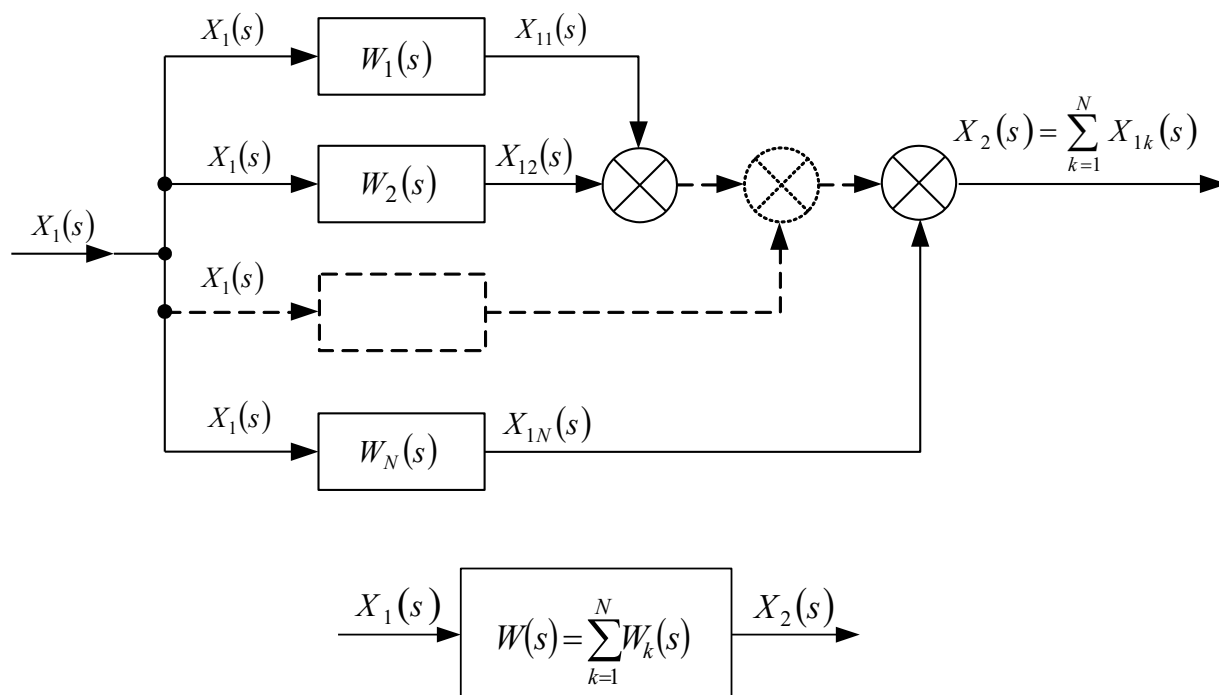
$$\frac{X_{N+1}(s)}{X_1(s)} = W(s) = W_1(s) W_2(s) \dots W_N(s) \quad (6.40)$$

Следователно

$$W(s) = \prod_{k=1}^N W_k(s) \quad (6.41)$$

Получения резултат показва, че при последователно свързване на динамични звена, еквивалентната предавателна функция $W(s)$ се получава като произведение $\prod_{k=1}^N W_k(s)$ от предавателните функции на отделните звена.

Паралелно е такова свързване на две или повече динамични звена при което входната величина за всички звена е еднаква а изходните величини се събират – фиг. 6.5:



Фиг. 6.5. Паралелно свързване на динамични звена

Съгласно фиг. 6.5 за изображението на изходната величина може да се напише

$$X_2(s) = X_{11}(s) + X_{12}(s) + \dots + X_{1N}(s) = \sum_{k=1}^N X_{1k}(s), \quad (6.42)$$

като се има в предвид равенството

$$X_{1k}(s) = W_k(s) X_1(s), \quad (6.43)$$

се получава

$$X_2(s) = W(s) X_1(s), \quad (6.44)$$

където,

$$W(s) = \sum_{k=1}^N W_k(s). \quad (6.45)$$

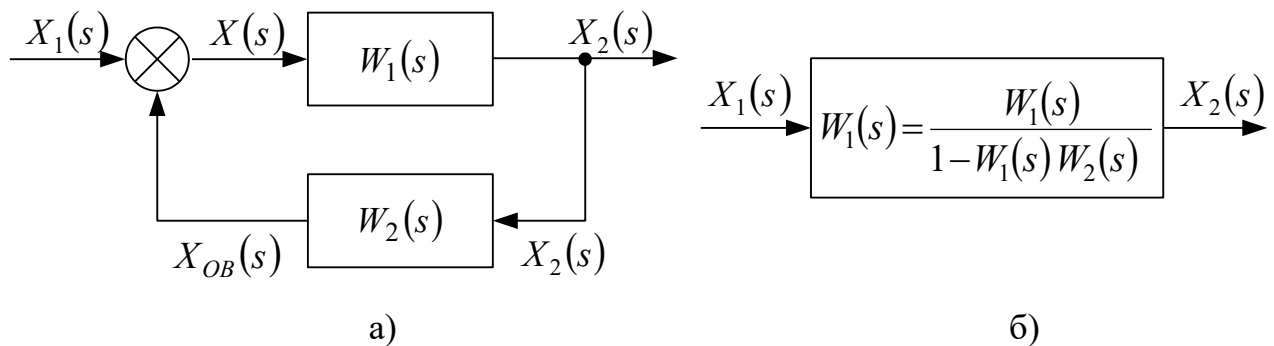
При паралелно свързване на динамични звена, еквивалентната предавателна функция е сума от предавателните функции на отделните звена.

Съединение с обратна връзка – изходна величина на едното звено се подава на входа му чрез друго звено.

Звеното, стоящо в правата верига с предавателна функция $W_1(s)$, се нарича *звено, обхванато с обратна връзка*, а звеното стоящо във веригата на обратната връзка с предавателна функция $W_2(s)$ – *звено на обратната връзка*.

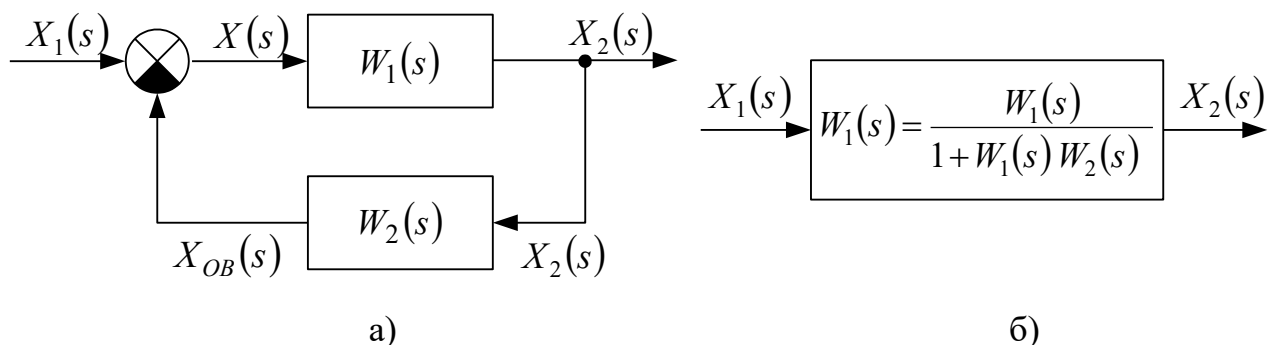
Изходната величина на звеното с обратна връзка $x_{OB}(t)$ може да се събира в входната величина $x_1(t)$ или да се изважда от нея. В първия случай обратната връзка е *положителна* – фиг. 6.6, а във втория – *отрицателна* обратна връзка – фиг. 6.7.

При положителна обратна връзка на входа на звеното, обхванато от обратната връзка, постъпва сигнал $x(t) = x_1(t) + x_{OB}(t)$, а при отрицателна обратна връзка $x(t) = x_1(t) - x_{OB}(t)$.



Фиг. 6.6. Звено, обхванато с положителна обратна връзка

Отрицателна обратна връзка



Фиг. 6.7. Звено, обхванато с отрицателна обратна връзка

Изображението на изходната величина е

$$X_2(s) = X(s) W_1(s). \quad (6.46)$$

За положителна обратна връзка

$$X(s) = X_{OB}(s) + X_1(s). \quad (6.47)$$

Като се вземе под внимание, че

$$X_{OB}(s) = W_2(s) X_2(s), \quad (6.48)$$

то

$$X(s) = W_2(s)X_2(s) + X_1(s), \quad (6.49)$$

и

$$X_2(s) = X(s)W_1(s) = W_1(s)W_2(s)X_2(s) + W_1(s)X_1(s). \quad (6.50)$$

След известна преработка се получава

$$X_2(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)} X_1(s), \quad (6.51)$$

или

$$X_2(s) = W(s)X_1(s), \quad (6.52)$$

където

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}. \quad (6.53)$$

Следователно, за звено с предавателна функция $W_1(s)$, обхванато със обратна връзка чрез звено с предавателна функция $W_2(s)$, еквивалентната предавателна функция се определя с предавателната функция на звеното, обхванато от обратната връзка, делена на единица минус произведението на предавателните функции, влизащи в свързването.

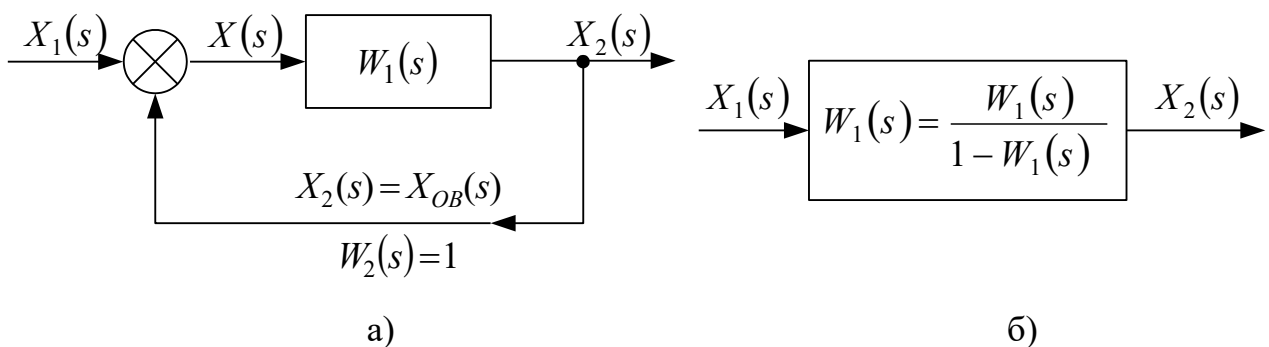
Чрез аналогични разсъждения може да се докаже, че за случая с отрицателна обратна връзка еквивалентната предавателна функция е:

$$W(s) = \frac{W(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} \quad (6.54)$$

Важен частен случай е свързването с единична обратна връзка.

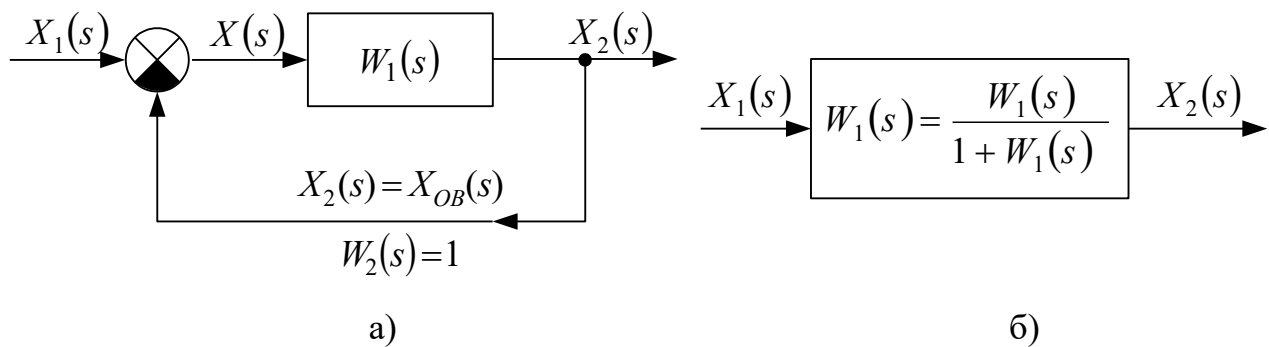
При единична връзка положителна обратна връзка:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)} \quad (6.55)$$



Фиг. 6.8. Звено, обхванато с единична положителна обратна връзка

При единична връзка отрицателна обратна връзка:



Фиг. 6.8. Звено, обхванато с единична отрицателна обратна връзка

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)}. \quad (6.56)$$

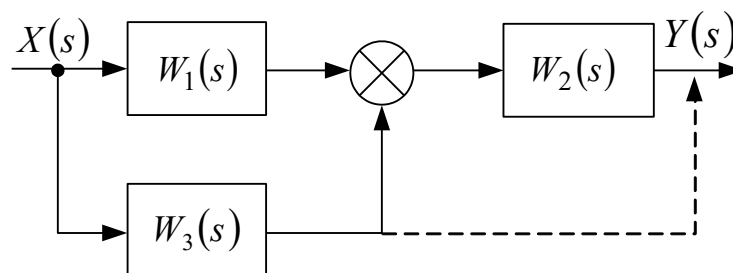
6.4. Структурни преобразувания

Правило на преноса.

В някои случаи за получаване на общата предавателна функция на системата с помощта на структурни преобразувания е удобно да се пренесе точката на прилагане на сигнала през определено звено по-близо до изхода или входа на системата. При такова преобразуване на структурната схема трябва предавателната функция на системата да остане неизменна.

При структурна схема на система, показана фиг. 6.9, резултантната предавателна функция е

$$W(s) = W_2(s) [W_1(s) + W_3(s)]. \quad (6.57)$$

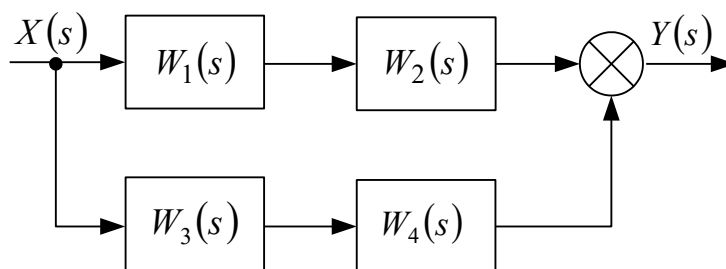


Фиг. 6.9. Структурна схема на изходната система

Пренася се точката на приложение на сигнала през звеното с предавателна функция $W_2(s)$, като се добавя в този канал предавателна функция $W_4(s)$. Структурната схема на преобразуваната система е показана на фиг. 6.10.

Предавателната функция на преобразуваната система има вида:

$$W(s) = W_1(s) W_2(s) + W_3(s) W_4(s). \quad (6.58)$$

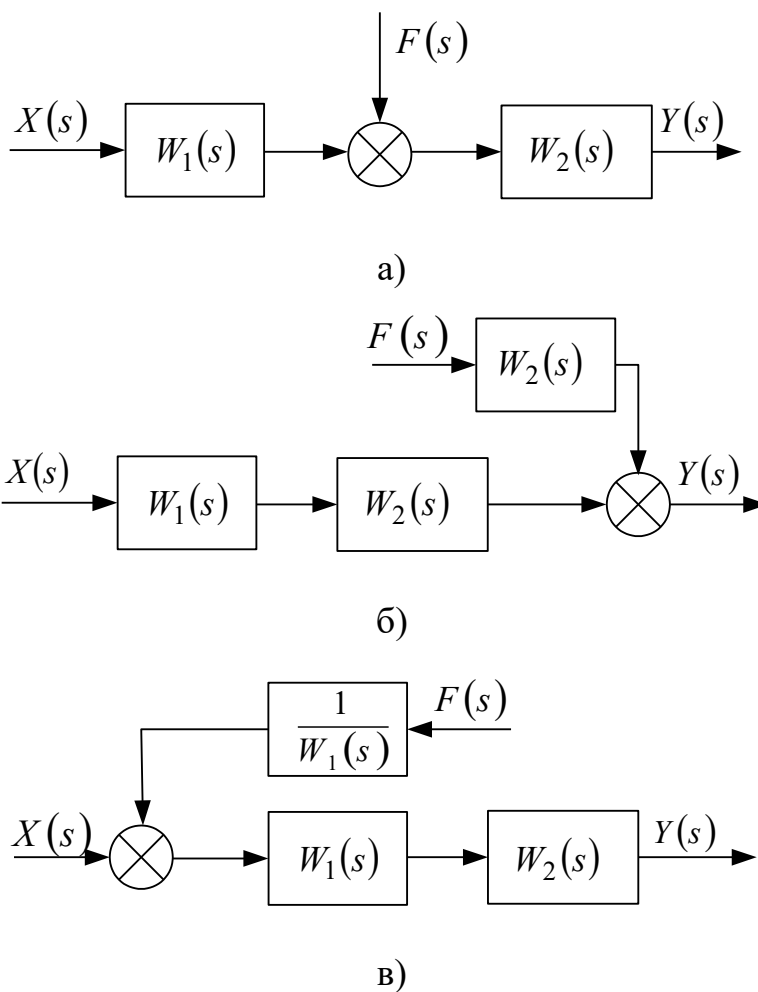


Фиг. 6.10. Структурна схема на преобразуваната система

Тъй като при преобразуването на структурната схема, предавателната ѝ функция не трябва да се променя, като се приравнят десните части на уравненията (6.57) и (6.58) се определя търсената предавателна функция

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) + W_3(s)W_4(s) = W_2(s)[W_1(s) + W_3(s)],$$

$$W_2(s) = W_4(s). \quad (6.59)$$



Фиг. 6.11. Структурни схеми при пренос на външно въздействие по веригата

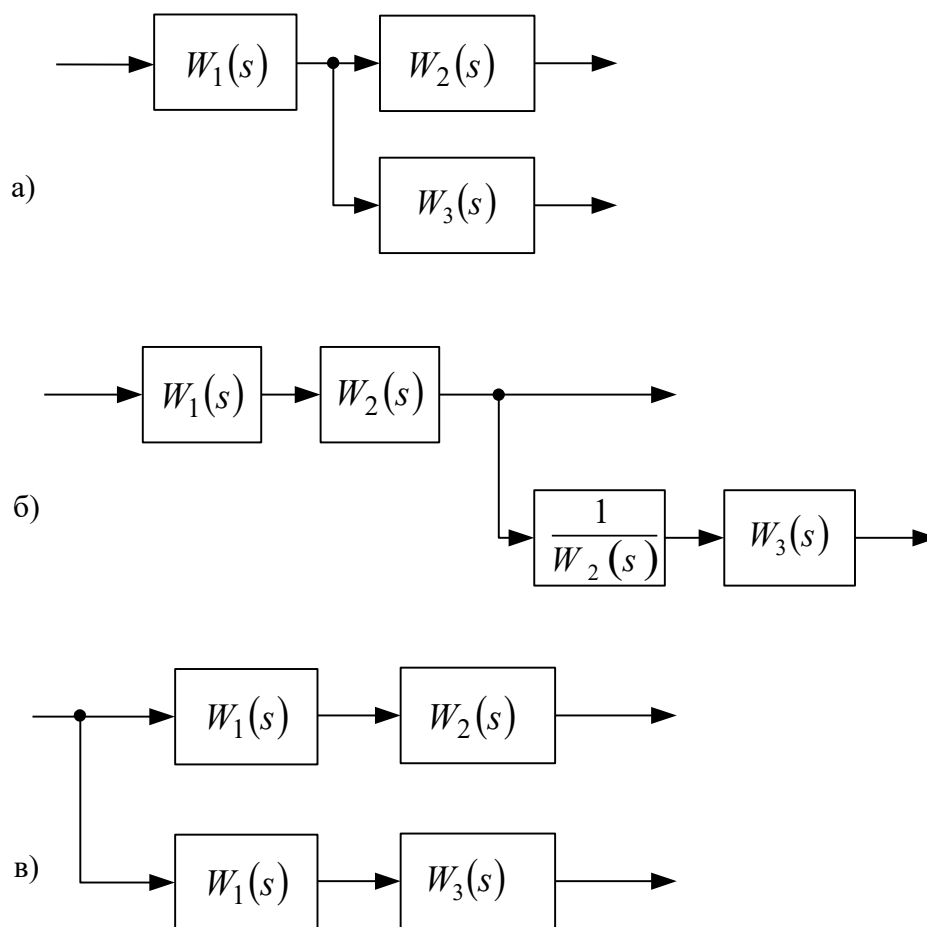
Следователно, при пренасяне на приложената точка на сигнала по-близо до изхода на системата в канала трябва да се добави предавателната функция на звеното, чрез които се пренася сигнала.

Аналогично правило може да се формулира и за пренос на точката на приложение на сигнала по-близо до входа: в съответния канал трябва да се добави обратната предавателна функция на звеното, пред което се пренася сигнала.

Пренос на сигнали от външно въздействие.

Пример за пренос на сигнал от външно въздействие напред и назад по веригата на сигнала е показана на фиг. 6.11. Външното въздействие е приложено по начина показан на фиг. 6.11, а. Пренасянето му напред, става като се добави предавателната функции на звената, през които е направен преноса $W_2(s)$ -фиг. 6.11, б. При преноса на външното въздействие във веригата назад, се добавя предавателна функция, реципрочна на предавателните функции на звената, през който е направен преноса - $\frac{1}{W_1(s)}$ - фиг. 6.11 в.

Очевидно е, че при тези правила на преноса се съхранява предаването на сигнала от външното въздействие $F(s)$ към изхода на системата.

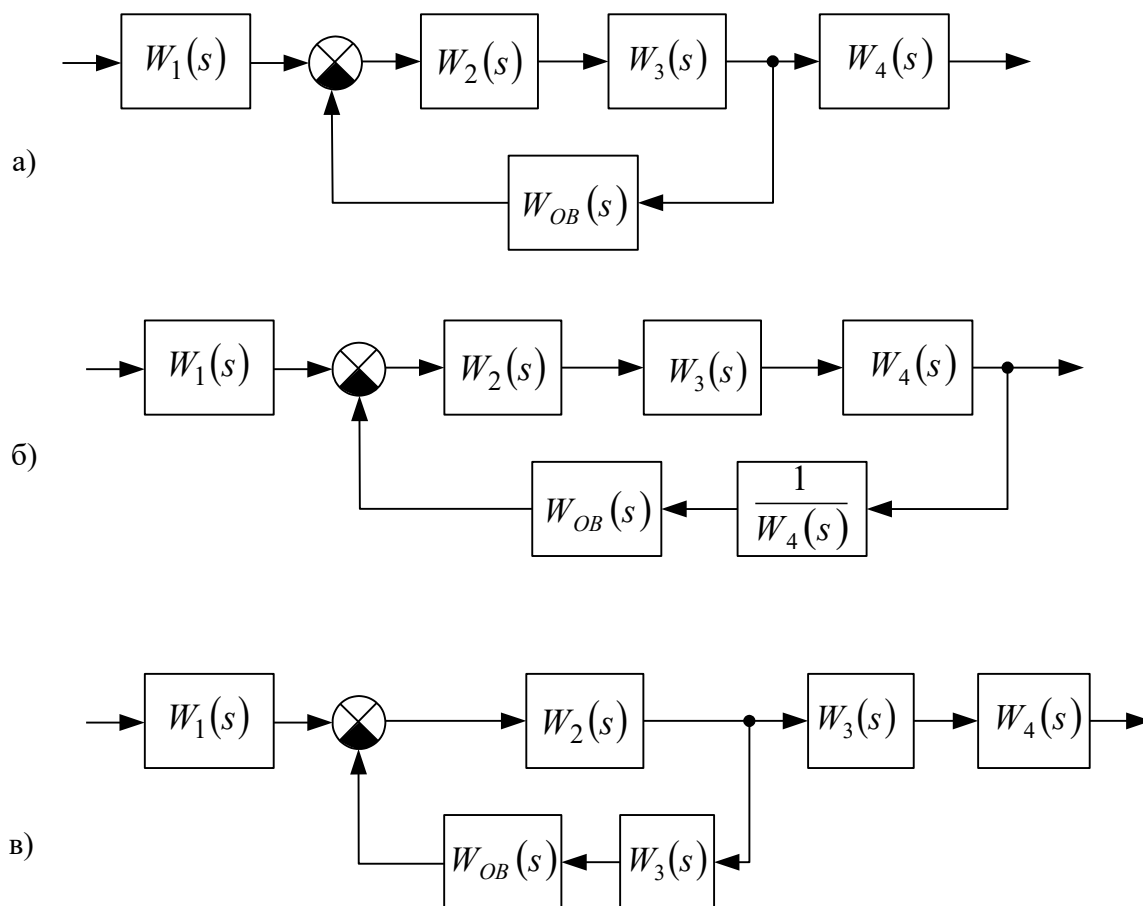


Фиг. 6.12. Структурни схеми при пренос на паралелен контур

Може да се пренася звено от паралелен контур напред или назад по веригата, като се правят съответните добавки. Например, разклонението на звеното $W_3(s)$ паралелно на контура в схемата на фиг. 6.12 а, може да се премести напред по веригата, като се добави предавателна функция, реципрочна на предавателната функция на звената, през които е направен преноса $\frac{1}{W_2(s)}$ - фиг. 6.12 б.

При преноса на тази верига назад трябва да се добави предавателната функция на тези звена, през които е направен преноса $W_1(s)$ - фиг. 6.12 в.

При преноса на мястото на включване на звеното за обратна връзка $W_{OB}(s)$ напред или назад, се постъпва аналогично, както в предния случай – фиг. 6.13.



Фиг. 6.13. Структурни схеми при пренос на звено в обратна връзка

6.5. Примери за преобразуване на структурни схеми

Пример 1. Да се определи предавателната функция на системата, структурната схема на която е показана на фиг. 6.14.

Предварително се определят предавателните функции на типовите съединения на звената: предавателната функция на паралелно свързаните звена

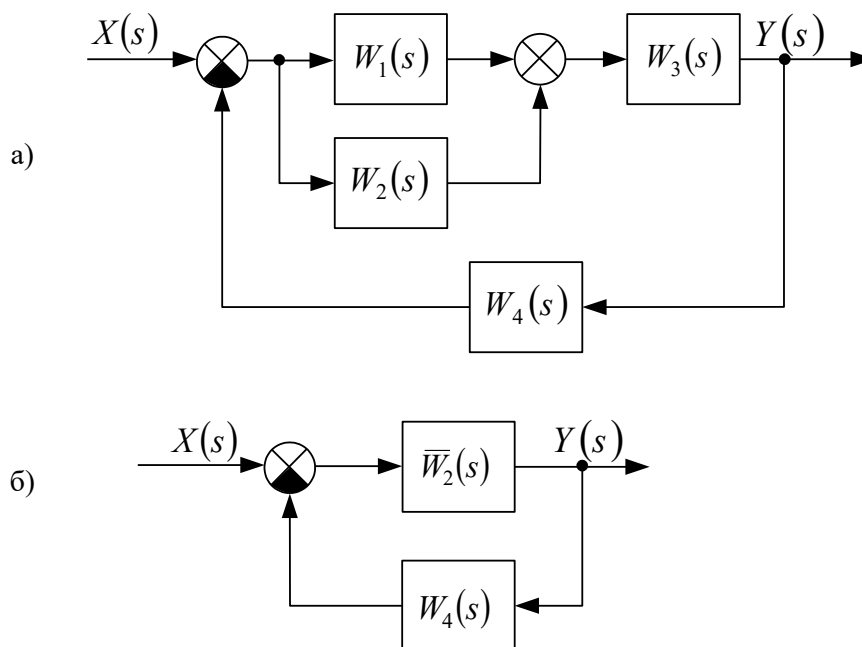
$$\bar{W}_1(s) = W_1(s) + W_2(s),$$

а предавателната функция на последователно свързаните звена е

$$\bar{W}_1(s) = \bar{W}_1(s) W_3(s).$$

Структурната схема се преобразува както е показано на фиг. 6. Като се използват структурните преобразувания, се записва предавателната функция на системата:

$$W(s) = \frac{\bar{W}_2(s)}{1 + \bar{W}_2(s) W_4(s)}$$

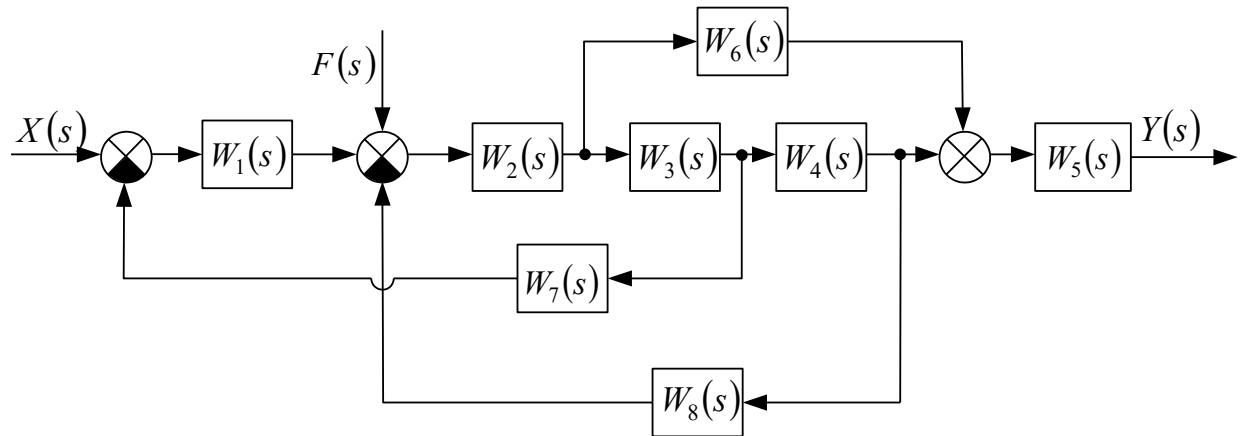


Фиг. 6.14. Структурни схеми към пример 1

След заместване окончателно се получава:

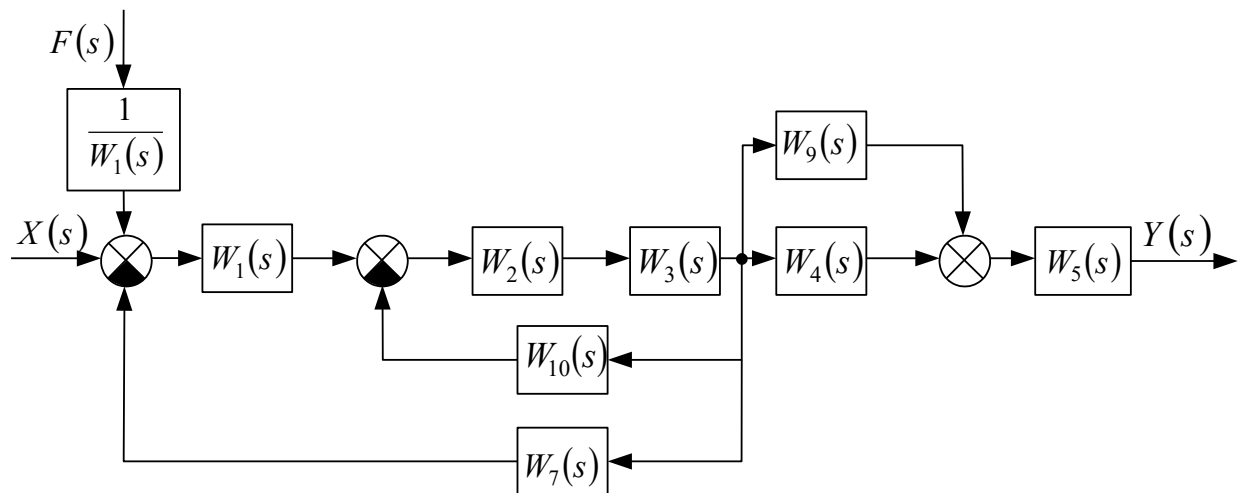
$$W(s) = \frac{[W_1(s) + W_2(s)] W_3(s)}{1 + [W_1(s) + W_2(s)] W_3(s) W_4(s)}$$

Пример 2. Да се определи предавателната функция на системата със структурна схема показана на фиг. 6.15, като се използват структурни преобразувания.



Фиг. 6.15. Структурни схеми към пример 2

Първата стъпка на преобразуването е показана на фиг. 6.15, където съгласно правилото за пренос на паралелен контур се получава $W_9(s) = \frac{W_6(s)}{W_3(s)}$, а съгласно правилото за пренос на мястото на включване на обратната връзка - $W_{10}(s) = W_4(s)W_8(s)$. Освен това е направен и пренос на външното въздействие $F(s)$



Фиг. 6.16. Структурни схеми към пример 2

Втората стъпка на преобразуването е показана на фиг. 6.16, където съгласно правилата за паралелно, последователно и включване с обратна връзка се получава

$$W_{11}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_{10}(s)W_2(s)W_3(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_8(s)}$$

$$W_{12}(s) = W_4(s) + W_9(s) = \frac{W_3(s)W_4(s) + W_6(s)}{W_3(s)}$$

Накрая, според фиг. 6.16 се намира окончателно общите предавателни функции на цялата отворена система по всяка от двете входни величини $X(s)$ и $F(s)$

$$W_X(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_{11}(s)W_{12}(s)W_5(s)}{1 + W_7(s)W_{11}(s)},$$

$$W_F(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{W_{11}(s)W_{12}(s)W_5(s)}{W_1(s)[1 + W_7(s)W_{11}(s)]}.$$

Аналогично на посочените примери, могат да се правят структурни преобразувания, като се привеждат към по-опростени и най-сложните структури на различни системи.

ГЛАВА 7

ОСНОВНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ОПЕРАТОРНОТО СМЯТАНЕ

7.1. Въведение в преобразованието на Лаплас

Настоящата глава има за цел да се припомнят някои основни положения на операторното смятане в светлината на автоматичното регулиране. Основните правила и теореми ще бъдат изложени без доказателства, които желаещите могат да намерят в многочислената математическа литература.

Решението на линейни диференциални уравнения може да се опрости при използване на методи, в основата на които лежи преобразуване на функция на реална променлива във функция на комплексна променлива. При това се преобразуват не само функциите на въздействието, но и математичните действия /например интегрирането и диференцирането/. Методите на функционалното преобразование позволяват интегро-диференциалните уравнения да се заменят с алгебрични уравнения, решението на които е значително по-просто.

Най-широко практическо приложение намира методът на преобразуването по Лаплас.

Преобразованието на Лаплас е функционално преобразование и служи за преобразуване на определен клас функции на реална променлива времето t във функция на комплексна променлива s .

С трансформацията на Лаплас може всяка функция $f(t)$ на независимата променлива t , наричана *оригинал*, да се изобрази посредством функцията $F(s)$, на независимата комплексна променлива $s = \sigma + j\omega$, наречена *образ*. Трансформирането означаваме със знака $\dot{\rightarrow}$, като стрелката винаги сочи оригинала, а в самото преобразуване с главна буква L например:

$$L[f(t)] = F(s)$$

или

$$F(s) \dot{\rightarrow} f(t)$$

Лапласов образ имат всички функции $f(t)$, ако отговарят на следните условия:

1. При $t < 0$ $f(t) \equiv 0$, т. е. оригинала е в реално време. $f(t)$ е непрекъснатата или по части непрекъснатата заедно с производните си от ред n ; $t (0 \rightarrow \infty)$.
2. $|f(t)| < M e^{c_0 t}$, т.е. функцията има определен порядък на нарастване и може да се намерят такива числа $M > 0$ и $c_0 > 0$, че да важи горното неравенство.
3. Функцията $f(t)$ и производните ѝ са непрекъснати за всички $t \geq 0$ или непрекъснатостта им е нарушена само в краен брой точки, които са точки на

прекъсване от първи род, като на всеки краен интервал от време t броя на тези точки трябва да е крайно число.

Трябва да се отбележи, че почти всички функции използвани в автоматичното регулиране отговарят на горното условие.

Образът на дадена функция $f(t)$, отговаряща на условието

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (7.1)$$

за крайно реално число σ , се определя от интеграла на Лаплас

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (7.2)$$

Интегралното преобразование показва, че функцията образ се различава от функцията оригинал не само по независимите променливи но и по вид, и затова оригиналът и образа се означават различно. Уравнението (7.1) едностранна Лапласова трансформация, защото интегрирането се извършва от $t = 0$ до $t = \infty$. Това означава, че информацията съдържаща се в $f(t)$ до момента от време $t = 0$ се пренебрегва и се приема за нула. Това ограничение не влияе в приложението на Лапласовата трансформация в изследването на системите за автоматично регулиране, защото при изследване на временните им характеристики обикновено се приема начално време $t = 0$. Още повече, че за реалните физични системи, когато входното въздействие се приложи при $t = 0$, реакцията на системата не започва по-рано от $t = 0$. Тези системи се наричат физически реализуеми.

Например образът на единичната стъпаловидна функция ще бъде:

$$= F(s) = L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}. \quad (7.3)$$

Уравнението (7.3) е валидно за

$$\int_0^{\infty} |1(t) e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |e^{-st}| dt < \infty, \quad (7.4)$$

което означава, че реалната част на s , σ трябва да е по-голяма от нула ($\text{Re } s > 0$).

За експоненциална функция

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad t \geq 0, \quad (7.5)$$

където α е реална константа. Лапласовата трансформация се получава

$$= F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}. \quad (7.6)$$

Често изразът (7.1) се означава като права трансформация на Лаплас.

Ако искаме да решим едно обикновено диференцирано уравнение с помощта на оперативно смятане, необходимо е да: преминем от оригинала към образа с помощта на правата трансформация; да решим полученото алгебрично

уравнение относно образа $F(s)$ и отново ползвайки обратната трансформация на Лаплас да преминем към оригинала на решението.

Обратната трансформация на Лаплас се свежда до решаване на интеграла:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (7.7)$$

където c е реална константа, която е по голяма от реалната част на всички особени точки на функцията $F(s)$. $c > \sigma$, $s = c + j\omega$.

Тъй като решението на интегралите (7.1) и (7.7) не винаги е лесна и бърза задача, за голяма част от използваните функции може да се намерят техните решения в съответните математически таблици на Лапласовите изображения. В приложение 1 са показани Лапласовите образи на някои често срещани в автоматичното регулиране функции.

7.2. Основни свойства на изображението на Лаплас

1. Образът на константата е равен на самата константа

$$L[A] = A \quad (7.8)$$

2. Хомогенност. При умножаване на оригинала с константа и образа се умножава със същата константа.

$$L[af(t)] = aF(s) \quad (7.9)$$

3. Линеини (адекватност). Образът на линейната комбинация е равен на линейната комбинация на образите.

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (7.10)$$

4. Подобие (изменение на мащаба). Ако $F(s) \divrightarrow f(t)$ и променим мащаба, важат следните зависимости:

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7.11)$$

$$L\left[\frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)\right] = F(as) \quad (7.12)$$

5. Изместване на оригинала и образа. Ако оригинала $f(t)$ закъснява по време с τ по отношение на друга функция, аналитично това може да се изрази като $f(t - \tau)$ и образа на тази функция ще бъде:

$$L[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s) \text{ за } \tau > 0 \quad (7.13)$$

$$\text{и } F(s) \xrightarrow{\div} f(t) \quad (7.14)$$

Подобно за изместване на образите важи:

$$L[e^{\pm s_0 t} f(t)] = F(s \pm s_0) \quad (7.15)$$

където s_0 е произволно комплексно число.

6. Диференциране на оригинала. Ако функцията $f(t)$ и производните ѝ са оригинали и $F(s)$ е образ на оригинала $f(t)$, в сила са следните равенства:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0), \quad (7.16)$$

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - f(0) - \frac{df(0)}{dt}, \quad (7.17)$$

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df(0)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}. \quad (7.18)$$

Тука трябва да се подчертае, че формалното заместване на производните $\frac{d}{dt} = p$; $\frac{d^2}{dt^2} = p^2$; $\dots \frac{d^n}{dt^n} = p^n$, с цел да се премине към по компактен запис на диференциалните уравнения, е еквивалентен с трансформацията на Лаплас /при формално заместване на $p = s$ / само при нулеви начални условия. Това се вижда добре от изразите $()$, $()$, и $()$ при който остават само първите членове при нулеви начални условия.

7. Диференциране на образа. Ако диференцираме образа $F(s)$ спрямо s , получаваме нов образ. От следните изрази се вижда връзката между оригинала на образа $F(s)$ и оригинала на новополучените образи.

$$\frac{dF(s)}{ds} \rightarrow -tf(t) \quad (7.19)$$

$$\frac{d^2 F(s)}{ds^2} \rightarrow t^2 f(t) \quad (7.20)$$

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} \rightarrow (-1)^n t^n f(t) \quad (7.21)$$

8. Интегриране на оригинала. Ако оригинала $f(t)$ е интегрируема функция и решението на интеграла $\int_0^t f(\tau) d\tau = \phi(t)$ също е оригинал, важи следното равенство:

$$L[\phi(t)] = L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (7.22)$$

Изразът важи при нулеви начални условия. Аналогично образите на „ n ” интеграл на функцията $f(t)$ ще бъдат:

$$L\left[\int_0^{t_n} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}\right] = \frac{1}{s^n} F(s) \quad (7.23)$$

9. Интегриране на образа. Ако $L[f(t)] = F(s)$ и $\frac{f(t)}{t}$ удовлетворява условията за оригинал, то

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(q) dq \quad (7.24)$$

10. Гранични свойства. Ако $F(s) \rightarrow f(t)$ са валидни следните равенства:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (7.25)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (7.26)$$

Изразите (7.25) и (7.26) намират широко приложение при оценка качеството на регулирането.

11. Умножаване на образите (конволютен интеграл). Ако $L[f_1(t)] = F_1(s)$ и $L[f_2(t)] = F_2(s)$, умножението на образите отговаря на операцията конволюция .

$$F_1(s) F_2(s) = L\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = L\left[\int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau\right] \quad (7.27)$$

Изразът (7.27) илюстрира недвусмислено още веднъж целесъобразността от използването преобразуване на Лаплас. Сложният конволютен интеграл,

който има смисъл и голямо значение в ТАРУ, се трансформира в просто умножение на образите.

Практически пример:

а) Нека $W(s)$ е предавателна функция на една система и $X(s)$ е образа на подавания входен сигнал. Като се изхожда от дефиницията на предавателната функция, образа на изходния сигнал ще бъде:

$$Y(s) = W(s) X(s) \quad (7.28)$$

Чрез обратното преобразуване и изрази (7.28) можем да получим вида на оригинала на изходната величина.

б) Ако се знае преходната характеристика на дадена система $h(t)$ или тегловата функция $\omega(t)$, като съответно образите им са $H(s)$ и $G(s)$ и ги заместим в изрази определящ предавателната функция, ще се получи:

$$H(s) = W(s) \frac{1}{s} \quad \text{т.е. } W(s) = sH(s), \quad (7.29)$$

и

$$G(s) = W(s) \cdot 1 \quad \text{т.е. } W(s) = G(s). \quad (7.30)$$

Това показва, че преходната характеристика и тегловата функция са в тясна връзка с предавателната функция на системата.

Търси се вида на изходния сигнал на дадена система $y(t)$, ако на входа и подаваме сигнал $X_1(t)$, предавателната ѝ функция е $W(s)$, тегловата функция $\omega(t)$ и преходната характеристика $h(t)$. Знае се, че:

$$Y(s) = W(s) X_1(s). \quad (7.31)$$

Замества се образа на преходната характеристика

$$Y(s) = X_1(s) s H(s), \quad (7.32)$$

или на тегловата функция

$$Y(s) = X_1(s) G(s). \quad (7.33)$$

Прилага се конволютният интеграл и получаваме, че

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau) x_1(t - \tau) d\tau, \quad (7.34)$$

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) x_1(\tau) d\tau. \quad (7.35)$$

в) Конволютният интеграл има свое място и при идентификацията на системите, когато знаем или можем да измерим само входния и изходния сигнал, а системата ни е непозната.

За да можем да се използват готовите таблици с образи, необходимо е операторното решение да се представи в удобен вид.

При диференциално уравнение от вида:

$$a(p)y(t) = b(p)g(t). \quad (7.36)$$

Преобразувано по Лаплас, при нулеви начални условия това уравнение има вида

$$a(s)Y(s) = b(s)G(s). \quad (7.37)$$

Изображението на изходната величина е

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} G(s). \quad (7.38)$$

Като се знае образа на изходната величина $Y(s)$, чрез използване на таблици за изображенията може да се намери оригинала $y(t)$.

Ако изображението на изходната величина представлява дробно рационален израз, то трябва да се представи във вид на сума от прости дроби с постоянни коефициенти. Обратното преобразование на Лаплас на простите дроби може да се получи от таблиците с оригинали и изображения, а окончателния израз за оригинала да се представи като сума от отделните намерени изображения.

Най-често в ТАР се явява необходимостта да се намери оригинала на дробно-рационални функции, представляващи отношение на два многочлена на " s ", познати ни като предавателни функции или резултат на операции с предавателни функции.

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (7.39)$$

$m \leq n$ и коефициентите a_i, b_i са реални числа. Горният израз може да се представи във вида:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n (s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} \dots (s - s_n)^{k_n}}. \quad (7.40)$$

k_i - означава кратността на корена.

В зависимост от това какви корени s_k могат да настъпят няколко случая.

а) Всички корени са реални различни - $k_i = 1$

образа на изразите (7.39) респективно (7.40) ще има вида:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{A_1}{(s - s_1)} + \frac{A_2}{(s - s_2)} + \dots + \frac{A_n}{(s - s_n)}, \quad (7.41)$$

където коефициентите се определят по:

$$A_k = \left[(s - s_k) \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_k}. \quad (7.42)$$

Тъй като

$$L^{-1} \left[\frac{A_k}{s - s_k} \right] = A_k e^{s_k t},$$

то

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b(s_k)}{a'(s_k)} e^{s_k t} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t} = \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t}, \quad (7.43)$$

където, $a'(s) = \frac{da}{ds} \Big|_{s=s_k}$ s_k са корени на характеристичното уравнение $a(s) = 0$.

7.3. Примери за използване на операторното смятане

Пример 1: $Y(s) = \frac{14s^2 + 55s + 51}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12},$

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -2; \quad s_3 = -3.$$

Следователно:

$$F(s) = \frac{14s^2 + 55s + 51}{2(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3},$$

$$A_1 = \frac{14 - 55 + 51}{6 - 24 + 22} = 2.5 \text{ или,}$$

$$A_1 = \left[(s+1) \frac{14s^2 + 55s + 51}{2(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-1} = \frac{14 - 55 + 51}{4} = 2.5,$$

$$A_2 = \left[(s+2) \frac{14s^2 + 55s + 51}{2(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-2} = 1.5,$$

$$A_3 = \left[(s+3) \frac{14s^2 + 55s + 51}{2(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-3} = 3.$$

Следователно:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 2.5e^{-t} + 1.5e^{-2t} + 3e^{-3t}.$$

При един нулев корен $s_1 = 0$, формулата (7.40) придобива вида:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{s a_1(s)} = \frac{b(s)}{s(s-s_2)(s-s_3)\dots(s-s_n)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s-s_2)} + \frac{A_3}{(s-s_3)} + \dots + \frac{A_n}{(s-s_n)} \quad (7.44)$$

$$Y(t) = \frac{b(0)}{a_1(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{b(s_k)}{s_k a_1'(s_k)} e^{s_k t}, \quad (7.45)$$

където:

$$a'_1(s_k) = \left. \frac{da_1(s_k)}{ds} \right|_{s=s_k}. \quad (7.46)$$

б) В случая, когато имаме многократен корен „ r ” и образа е от вида:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_i)^r}, \quad (7.47)$$

можем да го разложим:

$$F(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_{n-r}}{s-s_{n-r}} + \frac{K_1}{s-s_i} + \frac{K_2}{(s-s_i)^2} + \dots + \frac{K_r}{(s-s_i)^r}. \quad (7.48)$$

Константите A_k се намират по формула (7.42), а константите K_i се определят по формулите:

$$K_r = \left[(s-s_i)^r \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_i}, \quad (7.49)$$

$$K_{r-1} = \frac{d}{ds} \left[(s-s_i)^r \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_i},$$

$$K_{r-2} = \frac{d^2}{ds^2} \left[(s-s_i)^r \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_i},$$

.....

$$K_i = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[(s-s_i)^r \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_i}. \quad (7.50)$$

Пример 2:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^3(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)^3}$$

A_1 и A_2 се намират по вече показания начин $A_2 = \frac{1}{3}$; $A_1 = \frac{1}{24}$

По формулите (7.49) се намират константите K_i като за s се заместват стойностите на многократния корен.

$$K_3 = \left[(s+2)^3 Y(s) \right]_{s=-2} = \left[\frac{1}{s(s+3)} \right]_{s=-2} = -\frac{1}{2},$$

$$K_2 = \frac{d}{ds} \left[(s+2)^3 Y(s) \right]_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s(s+3)} \right]_{s=-2} = \frac{1}{4},$$

$$K_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+2)^3 Y(s) \right]_{s=-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{s(s+3)} \right]_{s=-2} = \frac{3}{8}.$$

Оригиналът ще получим като се имам в предвид, че

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(s+s_k)^n} \right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s_k t}.$$

За случая респективно:

$$y(t) = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} e^{-3t} + e^{2t} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} t - \frac{1}{4} t^2 \right).$$

в) Ако в многочлена $a(s)$ имаме двойка комплексни корени $s_1 = -\alpha + j\beta$; $s_2 = -\alpha - j\beta$ представяме $Y(s)$ по следния начин:

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} &= \frac{A_1 s + A_2}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{A_3}{s-s_3} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n} = \\ &= \frac{A_1 s + A_2}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A_3}{s-s_3} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n} \end{aligned} \quad (7.51)$$

Може да се покаже, че коефициентите A_1 и A_2 се получават по израза:

$$(A_1 s + A_2)_{s=s_1} = \left[\frac{b(s)}{a(s)} (s-s_1)(s-s_2) \right]_{s=s_1}. \quad (7.52)$$

Да поясним случая с пример:

Пример 3:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)} = \frac{A_1 s + A_2}{s^2+s+1} + \frac{A_3}{s}.$$

Двойките комплексни корени са:

$$s_{1,2} = -0.5 \pm j0.866$$

Умножава се $Y(s)$ с израза (s^2+s+1) и се замества за $s_{1,2} = -0.5 \pm j0.866$, следвайки правилото

$$\left(\frac{s+1}{s} \right)_{s=-0.5-j0.866} = (A_1 s + A_2)_{s=-0.5-j0.866}$$

Получава се уравнението:

$$\begin{aligned} 0.5 - j0.866 &= A_1(-0.5 - j0.866)^2 + A_2(-0.5 - j0.866) = \\ &= A_1(0.25 + j0.866 - 0.75) + A_2(-0.5 - j0.866) \end{aligned}$$

За да бъде изпълнено това равенство е необходимо *Re* и *Im* части да бъдат равни по между си, т. е.

$$-0.5 A_1 - 0.5 A_2 = 0.5$$

$$0.866 A_1 - 0.866 A_2 = 0.866$$

Получава се система уравнения, от която се изчисляват коефициентите A_1 и A_w

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -1 \\ A_1 - A_2 = -1 \end{cases} \quad A_1 = -1 \quad A_2 = 0$$

Константата A_3 , се намира по израза (7.42) или горната операция, умножавайки $F(s)$ с s и замествайки $s=0$ получаваме

$$A_3 = \left[\frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right]_{s=0} = 1$$

Пристъпва се към намирането на оригинала. Написва се образа във вида:

$$Y(s) = \frac{-s}{s^2 + s + 1} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + 0.866^2} + \frac{0.5}{(s+0.5)^2 + 0.866^2}$$

Като се използва таблицата на Лапласовите образи

$$F(s) \rightarrow f(t) = 1 - e^{-0.5t} \cos 0.866t + 0.578e^{-0.5t} \sin 0.866t$$

и се получава оригинала на предавателната функция.

За да се избегне пресмятането с комплексни числа, коефициентите при разлагането на елементарни дроби могат да се пресметнат по метода на неопределените коефициенти.

Пример 4.

$$Y(s) = \frac{5s^2 + 8s - 5}{s^2(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A_1s + A_2}{s^2 + 2s + 5} + \frac{A_3}{s^2} + \frac{A_4}{s}.$$

Има два комплексно спрегнати корена $s_{1,2} = -1 \pm j2$

Като се приведе под общ знаменател дясната част на уравнението се получава

$$Y(s) = \frac{(A_4 + A_1)s^3 + (A_3 + 2A_4 + A_2)s^2 + (2A_3 + 5A_4)s + 5A_4}{s^2(s^2 + 2s + 5)}.$$

Като се приравнят числителите на изразите се получава системата уравнения:

$$A_4 + A_1 = 0,$$

$$A_3 + 2A_4 + A_2 = 5,$$

$$2A_3 + 5A_4 = 8,$$

$$5A_4 = -5.$$

Като се реши системата уравнения се получава

$$A_3 = -1; \quad A_4 = 2; \quad A_1 = -2; \quad A_2 = 2;$$

Следователно:

$$Y(s) = \frac{5s^2 + 8s - 5}{s^2(s^2 + 2s + 5)} = \frac{-2s + 2}{s^2 + 2s + 5} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} = \frac{-2s + 2}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}.$$

Като се използват таблиците на Лаплас за оригинала се получава

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -t + 2 - 2e^{-t} \cos 2t + 2e^{-t} \sin 2t = -t + 2 + 2\sqrt{2}e^{-t} \cos[2t - \arctg(-1)] \\ -t + 2 + 2\sqrt{2}e^{-t} \cos(2t - 2.356)$$

Пример 5.

$$Y(s) = \frac{10.6}{2s^3 + 12.2s^2 + 29.4s + 23.4}$$

Решава се уравнението $2s^3 + 12.2s^2 + 29.4s + 23.4 = 0$,

и се получават корените $s_1 = -1.5$ $s_{2,3} = -2 \pm j1.6$.

Разлага се на сума от елементарни дроби:

$$\frac{5.3}{s^3 + 6.1s^2 + 14.7s + 11.7} = \frac{5.3}{(s+1.5)[(s+2.3)^2 + 1.6^2]} = \frac{A_1}{s+1.5} + \frac{A_2s + A_3}{(s+2.3)^2 + 1.6^2}.$$

Привежда се под общ знаменател дробните изрази в дясно и се сумират

$$\frac{5.3}{s^3 + 6.1s^2 + 14.7s + 11.7} = \frac{A_1[(s + 2.3)^2 + 1.6^2] + (A_2s + A_3)(s + 1.5)}{(s + 1.5)[(s + 2.3)^2 + 1.6^2]}.$$

Разкриват се скобите и се приравняват еднаквите степени на s в числителите

$$0s^2 + 0s + 5.3 = (A_1 + A_2)s^2 + (4.6A_1 + 1.5A_2 + A_3)s + 7.85A_1 + 1.5A_3.$$

Получава се система уравнения за определяне на неизвестните коефициенти

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$4.6A_1 + 1.5A_2 + A_3 = 0$$

$$7.85A_1 + 1.5A_3 = 5.3$$

Решението на системата дава

$$A_1 = 1.656; \quad A_2 = -1.656; \quad A_3 = -5.134$$

$$\frac{5.3}{s^3 + 6.1s^2 + 14.7s + 11.7} = \frac{1.656}{s + 1.5} - \frac{1.656s + 5.134}{(s + 2.3)^2 + 1.6^2}.$$

Преработва се израза за да се получат точни изображения от таблицата за оригинали и изображения

$$Y(s) = \frac{1.656}{s + 1.5} - \frac{1.656(s + 2.3)}{(s + 2.3)^2 + 1.6^2} - 0.828 \frac{1.6}{(s + 2.3)^2 + 1.6^2}.$$

Като се използва таблицата за оригинали и изображения се получава оригинала:

$$y(t) = 1.656e^{-1.5t} - 1.656e^{-2.3t} \cos 1.6t - 0.828e^{-2.3t} \sin 1.6t$$

Пример 6:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 3)s} = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 1} + \frac{A_3}{s + 2},$$

$$A_1 = \left[s \frac{1}{(s + 1)(s + 2)s} \right]_{s=0} = \frac{1}{2},$$

$$A_2 = \left[(s + 1) \frac{1}{(s + 1)(s + 2)s} \right]_{s=-1} = -1,$$

$$A_1 = \left[(s+2) \frac{1}{(s+1)(s+2)s} \right]_{s=-2} = \frac{1}{2},$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 3)s} = \frac{0.5}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{0.5}{s+2}.$$

Оригиналът ще се получи като се има в предвид, че

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1} \left[\frac{0.5}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{0.5}{s+2} \right],$$

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{0.5}{s} \right] + L^{-1} \left[\frac{-1}{s+1} \right] + L^{-1} \left[\frac{0.5}{s+2} \right],$$

$$y(t) = 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t}.$$

ГЛАВА 8

ВРЕМЕННИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ЛИНЕЙНИ ЗВЕНА

Връзката между входната и изходната величина на звената, математичните модели на които са приведени към линейни се определят от диференциалното уравнение

$$c(p) x_2(t) = b(p) x_1(t). \quad (8.1)$$

При зададен закон за изменение на входната величина $x_1(t)$, т. е. зададено входно въздействие изменението на изходната величина във времето /реакцията на звеното/ представлява решение на това уравнение. Решението се състои от две съставляващи, първата се определя от общото решение на уравнението без дясната част /решението на хомогенното уравнение/ и се нарича преходна /свободна/ съставляваща $x_{2np}(t)$, а второто събираемо се определя от частното решение на уравнението с дясна част и се нарича принудена /установена/ съставляваща $x_{2ycm}(t)$:

$$x_2(t) = x_{2np}(t) + x_{2ycm}(t). \quad (8.2)$$

Временна характеристика на звеното при произволно външно въздействие се нарича закона за изменение на изходната величина на звеното $x_2(t)$ във функция от времето при изменение на външното въздействие по определен закон и при условие, че до прилагането на външното въздействие звеното се е намирало в покой.

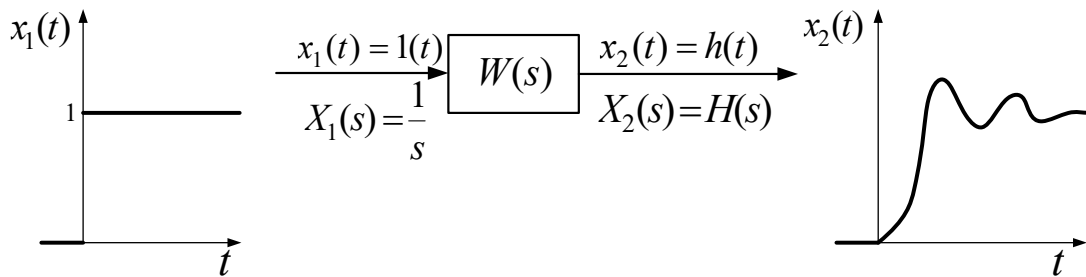
Временните характеристики преди всичко зависят от външното въздействие, за което се определят. Тези характеристики могат да се разглеждат като по отношение на входната величина $x_1(t)$, така и по смущението $f(t)$. При определяне на временните характеристики по произволно външно въздействие останалите външни въздействия се приемат за равни на нула.

За конкретно външно въздействие $x_1(t)$ временните характеристики зависят от свойствата на звеното и приетия закон за изменение на външното въздействие. Най-често за получаване на временните характеристики се приема, че външното въздействие се променя по закона делта функция $\delta(t)$ или единична степенчата функция $1(t)$.

8.1. Преходна функция/характеристика

Преходна функция на звеното $h(t)$ се нарича реакцията на звеното на входен сигнал $x_1(t) = 1(t)$ при условие, че до момента на прилагане на входното въздействие звеното се намира в покой – фиг.1. Предполага се, че единицата има същата размерност, както и физичната величина на входа на звеното. Ако входното въздействие представлява неединична степенна функция $x_1(t) = N1(t)$, то изходната величина е равна на $x_2(t) = Nh(t)$. Умножението на произволна функция на времето $x(t)$ на единичната степенчата функция $1(t)$

означава, че функцията на времето $x(t)$ ще съществува само при $t \geq 0$, а при $t < 0$ тя приема нулева стойност.



Фиг. 8.1. Определяне на преходната функция /характеристика/

Преходната характеристика може да се определи експериментално или да се изчисли теоретично. Ако звеното се описва с диференциално уравнение, то за определяне на преходната функция е необходимо да се намери решението на диференциалното уравнение $c(p) x_2(t) = b(p) x_1(t)$ при полагане на $x_1(t) = 1(t)$ и $x_2(t) = h(t)$ или:

$$c(p) h(t) = b(p) 1(t). \quad (8.3)$$

При нулеви начални условия

$$h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n)}(0) = 0. \quad (8.4)$$

При използване на Лапласова трансформация се получава изображението на преходната функция:

$$c(s) H(s) = b(s) \frac{1}{s} \quad H(s) = \frac{b(s)}{c(s)} \frac{1}{s} = \frac{W(s)}{s}. \quad (8.5)$$

От тук следва, че

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}. \quad (8.6)$$

Т. е., че преходната функция представлява обратното преобразуване на Лаплас от предавателната функция, разделена на оператора s .

В общия случай предавателната функция се определя от

$$W(s) = \frac{b(s)}{c(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1} s + c_n}. \text{ при } m \leq n \quad (8.7)$$

За това изображението е правилна рационална дроб:

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s (c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1} s + c_n)}. \quad (8.8)$$

За да се определи съответстващия оригинал може да се използва теоремата за разложението при обратната лапласова трансформация или компютри със специализиран софтуер.

Резултатите от изчисляването на преходната функция се представят във вид на графика, построена в координати (t, h) . Формата на кривата зависи от свойствата на звеното и може да има различен характер.

Началната /при $t \rightarrow 0$ / и крайна стойност /при $t \rightarrow \infty$ / на преходната функция може да се определи и без изчисление на самата функция $h(t)$. По теоремата за началната стойност

$$h(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) \quad (8.9)$$

Като се замести по формула 3, се получава

$$h(0) = \begin{cases} 0, & \text{при } m < n \\ \frac{b_0}{c_0} & \text{при } m = n. \\ \infty & \text{при } m > n \end{cases} \quad (8.10)$$

Следователно, когато предавателната функция е правилна рационална дроб, началната стойност на преходната функция е винаги равна на нула. По теоремата за крайната стойност

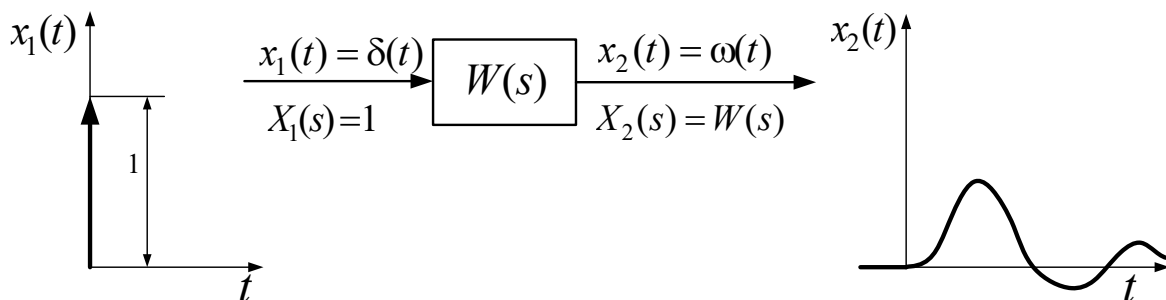
$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} W(s). \quad (8.11)$$

В този случай, когато при функцията 3 коефициента $b_m \neq 0$ се получава

$$h(\infty) = \begin{cases} k = \frac{b_m}{c_n}, & \text{при } c_n \neq 0 \\ \infty & \text{при } c_n = 0 \end{cases}. \quad (8.12)$$

8.2. Тегловна функция/характеристика

Тегловна функция /импулсно преходна функция/ $\omega(t)$ на звеното се нарича реакцията му на входен сигнал единична импулсна функция $x_1(t) = \delta(t)$, при условие, че до прилагането на входното въздействие звеното е било в покой фиг. 8.2.



Фиг. 8.2. Тегловна функция

Тегловната функция може да се определи теоретично или експериментално. За експерименталното определяне се записва процеса на изменение на изходната величина при изменение на входното въздействие във вид на реален импулс с произволна форма и единична площ. Възникващата при това грешка е толкова по-малка, колкото по-малка е продължителността на импулса в сравнение с времето за затихване на преходния процес.

Ако звеното се описва с диференциално уравнение, то за определяне на тегловната функция е необходимо да се намери решението на диференциалното уравнение $c(p) x_2(t) = b(p) x_1(t)$ при полагане на $x_1(t) = \delta(t)$ и $x_2(t) = \omega(t)$ или:

$$c(p) \omega(t) = b(p) \delta(t). \quad (8.13)$$

При нулеви начални условия

$$\omega(0) = \omega'(0) = \dots = \omega^{(n)}(0) = 0. \quad (8.14)$$

При използване на Лапласова трансформация се получава изображението на тегловната функция:

$$L\{\omega(t)\} = W(s). \quad (8.15)$$

От тук следва, че

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}. \quad (8.16)$$

От тук следва, че тегловната функция представлява обратната лапласово преобразуване на предавателната функция на звеното. Изчисляването ѝ може да се извършва, чрез теоремата на разложението или с използване на софтуерни продукти.

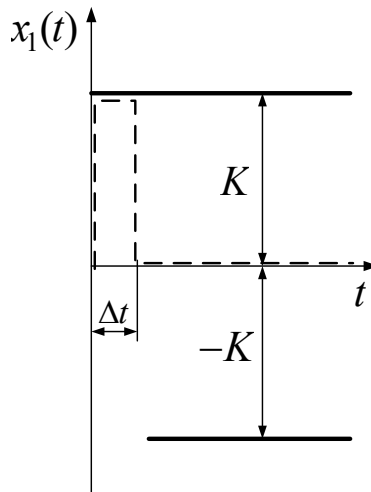
Началната и крайна стойност на тегловната функция може да се определи по

$$\omega(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s W(s), \quad (8.17)$$

$$\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s). \quad (8.18)$$

Тегловната функция се строи в координати (t, ω) , като характера на графиката зависи от свойствата на звеното.

На практика реакцията на звеното на импулсно въздействие може да се определи по следния начин. Предполага се в началото, че за входно въздействие служат две отместени едно спрямо друго единични входни въздействия $K1(t)$ и $-K1(t - \Delta t)$ - фиг. 8.3.



Фиг. 8.3. Реализиране на тегловна функция

В този случай изменението на изходната величина във времето се определя от разликата на две преходни функции

$$x_2(t) = K h(t) - K h(t - \Delta t). \quad (8.19)$$

Ако се увеличава стойността на K и едновременно се намаля Δt така, че $K \Delta t$, т. е. площта ограничена от прекъснатите линии на фиг. 3 се доближава до единица, то ще се приближава до еденечното импулсно въздействие. Като се отчита такова изменение $K \Delta t$, се умножава и разделя дясната част на функцията б на Δt , и като се намери границата на получения израз при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K \Delta t [h(t) - K h(t - \Delta t)]}{\Delta t} = \frac{d h(t)}{dt}. \quad (8.20)$$

Тегловната функция може да се получи чрез диференциране по време от преходната функция.

Тегловната функция на звеното е свързана с предавателната функция на същото чрез лапласовото преобразуване. Предавателната функция е изображение на тегловната функция и е свързана с нея с интегралното преобразование

$$W(s) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-st} dt. \quad (8.21)$$

За входно въздействие от произволен тип, приложено в момента $t=0$, преходния процес на изхода на звеното при нулеви начални условия може да се определи от интегралите на Дюамел:

По преходна функция

$$x_2(t) = x_1(t) h(t) + \int_0^t h(\tau) x_1'(t - \tau) d\tau \quad (8.22)$$

По тегловна функция

$$x_2(t) = \int_0^t \omega(\tau) x_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t \omega(t - \tau) x_1(\tau) d\tau \quad (8.23)$$

Като преимущество на временните характеристики пред предавателните функции и диференциалните уравнения може да се посочи тяхната нагледност и възможност за експериментално определяне.

8.3. Честотни характеристики

Най-често при изследване на динамичните свойства на звената и системите се използва хармонично входно въздействие

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega t.$$

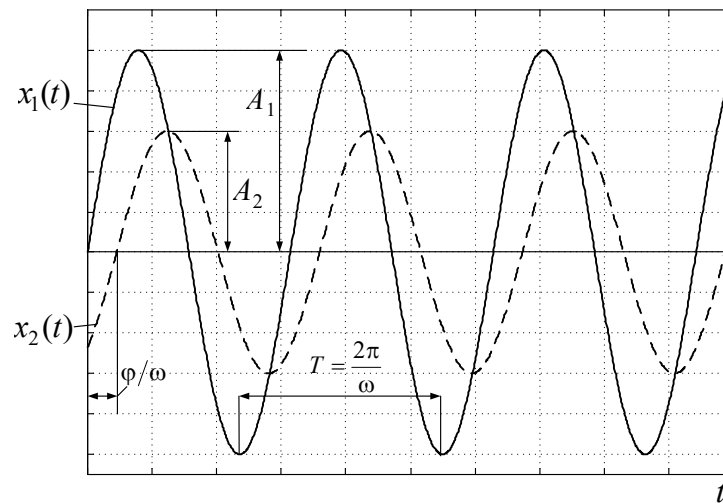
Такова входно въздействие може лесно да се осъществи практически и позволява при минимален обем на изчисления да се получат характеристики, достатъчно пълно отразяващи динамичните свойства на звената и системите.

При хармоничното входно въздействие преходната /свободна/ съставляваща $x_{2np}(t)$ се определя общото решение на хомогенното диференциално уравнение, и описва свободното движение, възникващо в звеното или системата след прилагане на хармоничния входно въздействие. Второто събираемо $x_{2ycm}(t)$ се определя от частното решение на уравнението и описва принуденото движение на звеното или системата. Вследствие на линейността на диференциалното уравнение принуденото движение е също хармонична функция със същата ъглова честота ω но с различна амплитуда A_2 и фаза φ .

$$x_{2ycm}(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.24)$$

За устойчиви системи, при $t \rightarrow \infty$ свободната съставляваща $x_{2np}(t)$ ще се стреми към нула и закона за изменение на изходната величина във времето ще придобие установен хармоничен характер – фиг. 8.4., т. е

$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi).$$



Фиг. 8.4. Определяне на основните параметри при хармонично входно въздействие

Като се използва комплексно-показателна форма на запис на хармоничните функции за отношението на изходната величина към входната на звеното или системата се записва:

$$W(i\omega) = \frac{A_2 \sin(\omega t + \varphi)}{A_1 \sin \omega t} = \frac{A_2 e^{i(\omega t + \varphi)}}{A_1 e^{i\omega t}} = \frac{A_2}{A_1} e^{i\varphi} = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}, \quad (8.25)$$

$$A(\omega) = \frac{A_2}{A_1}; \quad e^{i\varphi(\omega)} = \frac{e^{i(\omega t + \varphi)}}{e^{i\omega t}} = e^{i(\omega t + \varphi) - i\omega t}. \quad (8.26)$$

Това отношение известно под наименованието *честотна предавателна функция* или *комплексен коефициент на усилване* и при дефинирането на

честотните характеристики обикновено се изхожда от него. Формално можем да го получим, като се замени в предавателната на обекта или системата оператора на Лаплас " s " с оператора на Фурие $(i\omega)$.

$$W(i\omega) = \frac{b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m}{c_0(i\omega)^n + c_1(i\omega)^{n-1} + \dots + c_{n-1}(i\omega) + c_n}, \quad (8.27)$$

$$W(i\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} = [W(s)s]_{s=i\omega}. \quad (8.28)$$

Функцията $W(i\omega)$ още се нарича амплитудно-фазова честотна характеристика /АФЧХ/ и може графично да се представи с ходографа на радиус-вектора, начертан в комплексната равнина при изменение на честотата от $-\infty$ до $+\infty$. На практика се разглеждат АФЧХ, получени при положителни стойности на честотата от 0 до $+\infty$.

В зависимост от задачите, които решаваме се налага използването и на други честотни характеристики. Те могат да се систематизират като се запишат зависимостите за амплитудата /модула/ на честотно предавателната функция,

Амплитудочестотна характеристика (АЧХ) – това е модулет на АФЧХ, изразяващ отношението на амплитудата на изходния сигнал към амплитудата на входния, във функцията.

$$A(\omega) = \text{mod } W(i\omega) = |W(i\omega)| = \frac{A_2}{A_1}. \quad (8.29)$$

Фазочестотна характеристика (ФЧХ) – представлява аргумента на АФЧХ $\varphi(\omega) = \arg W(i\omega)$ и изразява дефазирането на изходна величина спрямо входната като функция на честотата.

Графичното построяване на амплитудно-фазовата честотна характеристика АФЧХ става в комплексната равнина фиг. 6 в полярни координати (A, φ) като ходограф на функцията $W(i\omega)$. Дължината на радиус вектора /модула $W(i\omega)$ / е

равен на $A(\omega) = \frac{A_2}{A_1}$ отношението на амплитудите на входната и изходната

величина, а ъгъла между радиус-вектора и положителната част на реалната полуос /положителните стойности се нанасят обратно, а отрицателните по посока на часовниковата стрелка/ е равен на дефазирането $\varphi(\omega) = \arg W(i\omega)$ между тези величини.

Може да се построи АФЧХ и в правоъгълна /декартова/ координатна система, като се отделят реалната $U(\omega)$ и имагинерната $V(\omega)$ част на честотно предавателната функция $W(i\omega)$:

$$W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega), \quad (8.30)$$

$U(\omega) = \text{Re } W(i\omega)$ - реална част на честотната характеристика,

$V(\omega) = \text{Im } W(i\omega)$ - имагинерна част на честотната характеристика.

Връзката между реалната и имагинерната част на честотно предавателната функция и амплитудата и дефазирането може да се представи с:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (8.31)$$

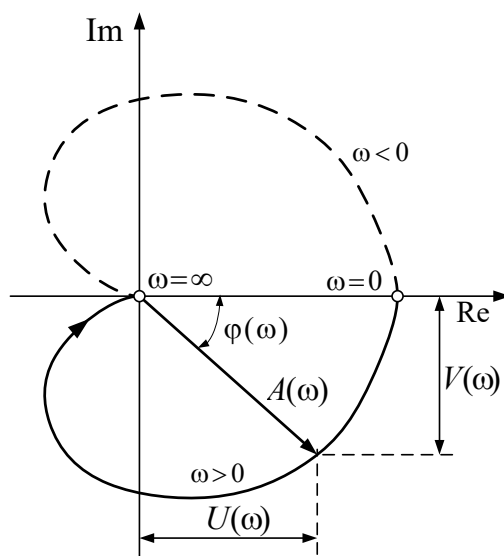
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (8.32)$$

При построяването на графиката на АФЧХ се задават стойности на ω в интервала $\omega = 0 \rightarrow \infty$ и се изчисляват $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ или $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Получените точки се съединяват с плавна крива. Около нанесените точки може да се отбележат съответстващите им честоти - ω , ω_2 , ω_3 и т. н.

Огледалното изображение на АФЧХ спрямо реалната ос е за честоти $\omega = 0 \rightarrow -\infty$ които нямат физически смисъл, но в някои случаи има теоретичен интерес.

При замяна в честотно предавателната функция $W(i\omega)$ на честотата ω с $-\omega$ се получава комплексно спрегната величина

$$W(-i\omega) = \overline{W(i\omega)}. \quad (8.33)$$

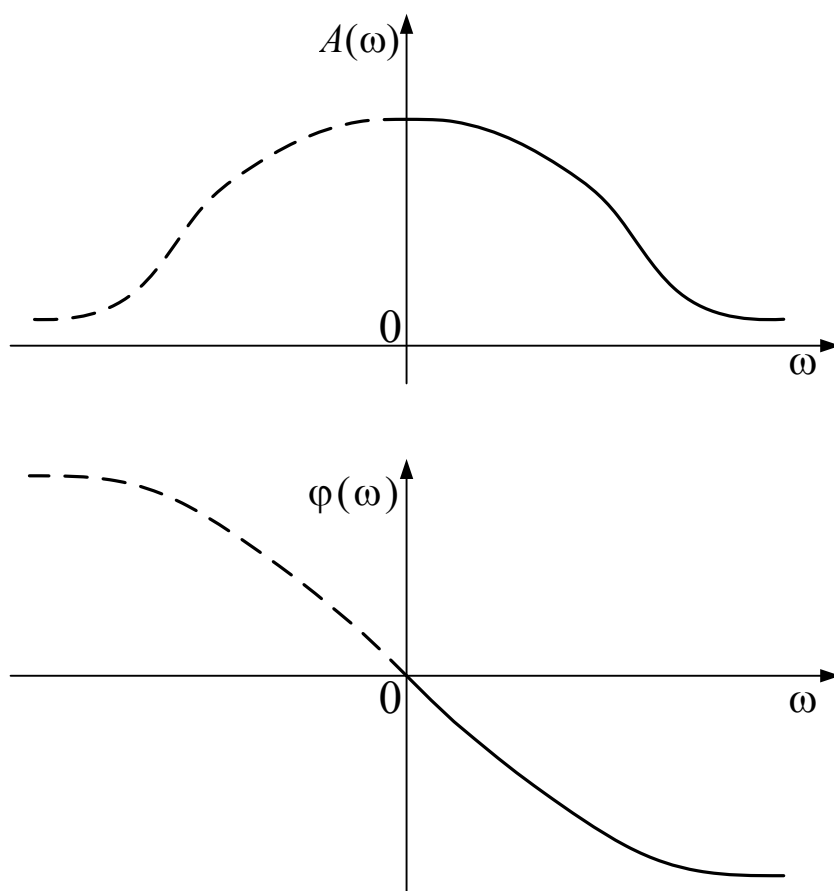


Фиг. 8.4. Амплитудо-фазова честотна характеристика

На фиг. 8.4. ъгъла $\varphi(\omega)$ е показан като отрицателен /по часовниковата стрелка/ защото най-често реакцията на изхода на звеното има изоставане по фаза в сравнение с входната величина. Стрелката върху характеристиката показва посоката на честотите. За отрицателни честоти АФЧХ ще бъде симетрична спрямо реалната ос (пунктираната част на характеристиката).

Ако построим реалната част на АФЧХ – $U(\omega)$ като функция на честотата ω , получаваме реалната честотна характеристика и аналогично имагинерната честотна характеристика за имагинерна част на АФЧХ.

Вместо АФЧХ може да се построят по отделно амплитудо-честотната характеристика и фазо-честотна характеристика ФЧХ. Това е показано на фиг. 8.5.



Фиг. 8.5. Амплитудо-честотна и фазо-честотна характеристика

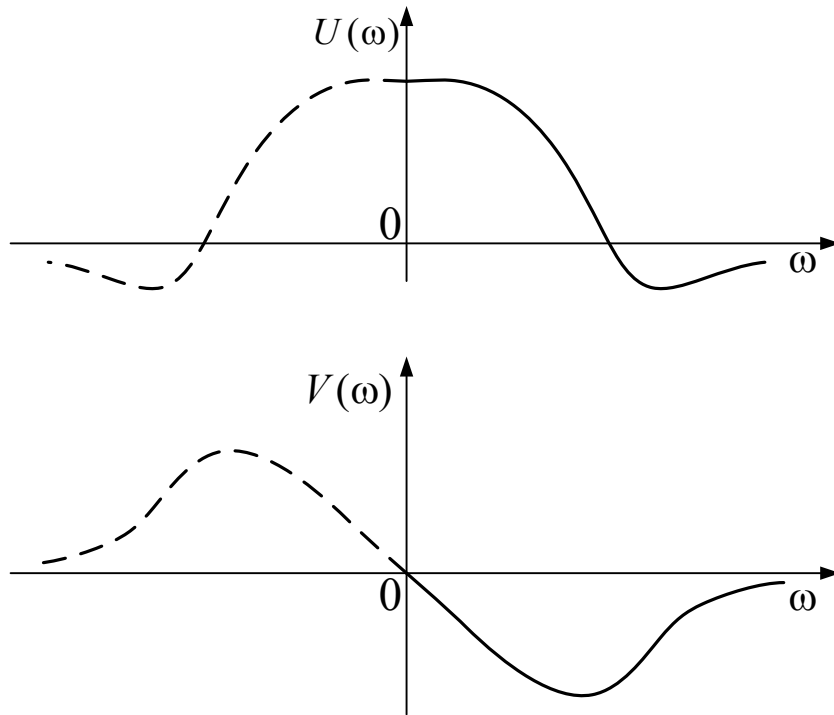
Амплитудо-честотната характеристика показва, как пропуска звеното сигнали с различна честота. Оценката за пропускането се прави като отношение на амплитудата на изходната към входната величина.

Фазочестотната характеристика показва фазовите разлики при различни честоти.

Амплитудочестотната характеристика е четна функция, т.е. $A(\omega) = A(-\omega)$ а фазочестотната характеристика – нечетна функция на честотата $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$.

Могат да се построят също отделно реалната и имагинерната честотни характеристики по функциите $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Това построение е показано на фиг. 8.6.

Реалната честотната характеристика е четна функция, т.е. $U(\omega) = U(-\omega)$ а Имагинерната честотната характеристика – нечетна функция на честотата $V(-\omega) = -V(\omega)$.



Фиг. 8.6. Реална-честотна и Имагинерна-честотна характеристика

Построяването на честотните характеристики $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $U(\omega)$ и $V(\omega)$ се прави при предварителни преобразувания. Честотната предавателна функция се представя във вида:

$$W(i\omega) = \frac{b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m}{c_0(i\omega)^n + c_1(i\omega)^{n-1} + \dots + c_{n-1}(i\omega) + c_n} = \frac{U_N(\omega) + iV_N(\omega)}{U_D(\omega) + iV_D(\omega)}. \quad (8.34)$$

където, $U_N(\omega), iV_N(\omega)$ - реална и имагинерна част на числителя, и $U_D(\omega), iV_D(\omega)$ - реална и имагинерна част на знаменателя.

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(U_N^2 + V_N^2)}{(U_D^2 + V_D^2)}}, \quad (8.35)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(U_N + iV_N) - \arg(U_D + iV_D). \quad (8.36)$$

За да се определят $U(\omega)$ и $V(\omega)$ трябва числителя и знаменателя на честотно предавателната функция да се умножи на комплексно спрегнатия израз на знаменателя:

$$W(i\omega) = \frac{(U_N + iV_N)(U_D - iV_D)}{(U_D + iV_D)(U_D - iV_D)} = \frac{(U_N + iV_N)(U_D - iV_D)}{(U_D^2 + V_D^2)}. \quad (8.37)$$

От този израз се получава

$$U(\omega) = \frac{(U_N U_D + V_N V_D)}{(U_D^2 + V_D^2)}, \quad (8.38)$$

$$U(\omega) = \frac{(U_D V_N + U_N V_D)}{(U_D^2 + V_D^2)}. \quad (8.39)$$

8.4. Честотни характеристики при основните свързвания на звената

Последователно свързване

При последователно свързване на звена, честотно предавателната функция се определя от:

$$W(i\omega) = [W(s)]_{s=i\omega} = \prod_{k=1}^N W_k(i\omega). \quad (8.40)$$

Следователно, АФЧХ на последователно свързаните звена е равна на произведението от АФЧХ на отделните звена.

Като се отчете

$$W(i\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}, \quad (8.41)$$

$$W_k(i\omega) = A_k(\omega) e^{i\varphi_k(\omega)} \quad k = 1, 2 \dots N, \quad (8.42)$$

то

$$A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} = \prod_{k=1}^N A_k(\omega) e^{i\varphi_k(\omega)}, \quad (8.43)$$

или

$$A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} = e^{i \sum_{k=1}^N \varphi_k(\omega)} \prod_{k=1}^N A_k(\omega). \quad (8.44)$$

При последователно свързване на динамични звена амплитудочестотните им характеристики АЧХ се умножават, а фазочестотните ФЧХ се събират:

$$A(\omega) = \prod_{k=1}^N A_k(\omega), \quad (8.45)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\omega). \quad (8.46)$$

При паралелно свързване на звена

$$W(i\omega) = [W(s)]_{s=i\omega} = \sum_{k=1}^N W_k(i\omega), \quad (8.47)$$

и АФЧХ представлява сума от амплитудо фазо честотните характеристики на отделните звена. Реалната и имагинерна честотна характеристика се записва

$$U(\omega) = \operatorname{Re}[W(i\omega)] = \sum_{k=1}^N U_k(\omega), \quad (8.48)$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im}[W(i\omega)] = \sum_{k=1}^N V_k(\omega). \quad (8.49)$$

Като се знаят тези зависимости може да се определи:

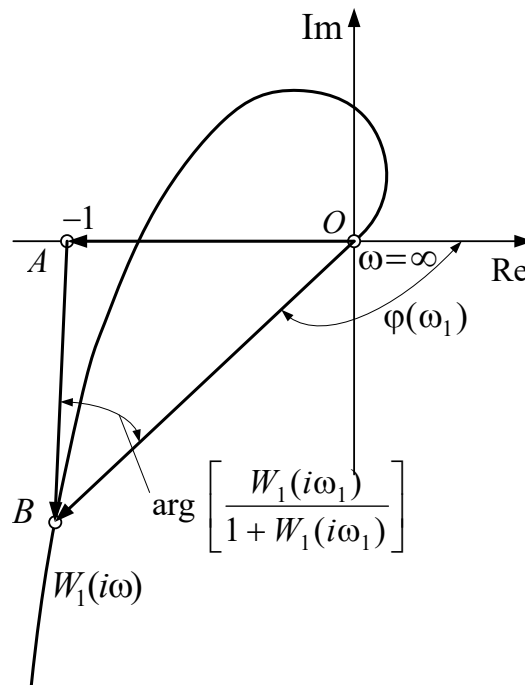
$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (8.50)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(U + iV). \quad (8.51)$$

Честотни характеристики на звено обхванато с единична обратна връзка.

Приема се, че са известни всички честотни характеристики на звено с предавателна функция $W_1(s)$, обхванато с единична отрицателна обратна връзка. Трябва да се определят честотните характеристики на свързането с предавателна функция $W(s)$. Честотно предавателната функция се получава във вида:

$$W(i\omega) = [W(s)]_{s=i\omega} = \frac{W_1(i\omega)}{1 + W_1(i\omega)}. \quad (8.52)$$



Фиг. 8.7. Амплитудна фазо-честотна характеристика

Изразът (8.52) може да се представи

$$W(i\omega) = H(\omega) e^{i\theta(\omega)} \quad (8.53)$$

където $H(\omega)$ и $\theta(\omega)$ са амплитудната и фазовата характеристика на свързването.

Понеже $W_1(i\omega)$ е известна, то за всяка фиксирана стойност на честотата ω от фиг. 8.7 може да се определи:

$$H(\omega_1) = \frac{OB}{AB} = \frac{|W_1(i\omega_1)|}{|1 + W_1(i\omega_1)|}, \quad (8.54)$$

$$\varphi(\omega_1) = \arg W_1(i\omega_1) - \arg [1 + W_1(i\omega_1)]. \quad (8.55)$$

Като се направят аналогични изчисления за няколко стойности на честотата ω може да се получат исканите характеристики $H(\omega)$ и $\theta(\omega)$.

Често в практиката се използват номограми /намерат се в специализираната литература/ за определяне на характеристики $H(\omega)$ и $\theta(\omega)$ по АФЧХ на $W_2(s)$.

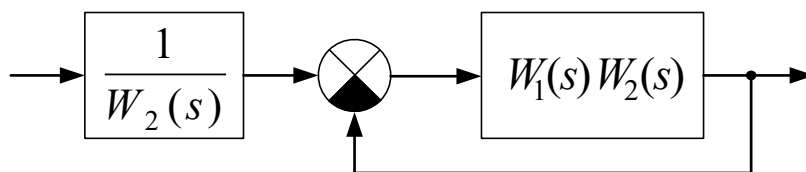
При свързване на звено /с предавателна функция $W_1(s)$ / с не единична обратна връзка /с предавателна функция $W_2(s)$ / еквивалентната предавателна функция е

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}. \quad (8.56)$$

Като се умножи числителя и знаменателя с $W_2(s)$ се получава

$$W(s) = \frac{1}{W_2(s)} \cdot \frac{W_1(s)W_2(s)}{[1 + W_1(s)W_2(s)]} \quad (8.57)$$

По този начин свързването с неединична обратна връзка фиг. 8.8 е еквивалентно на свързване на две звена едната от които /с предавателна функция $\frac{1}{W_2(s)}$ / няма обратна връзка, а второто представлява разгледаното по-горе свързване с единична обратна връзка.



Фиг. 8.8. Еквивалентна схема на свързване на звена с неединична обратна връзка

8.5. Логаритмични честотни характеристики

Честотните характеристики, построени в логаритмични скали се наричат логаритмични честотни характеристики. За практически цели е удобно да се използват десетични логаритми и да се построяват поотделно *логаритмичната честотна характеристика* ЛАЧХ и *логаритмичната фазова характеристика* ЛФЧХ. За построяване на ЛАЧХ се определя:

$$L(\omega) = 20 \lg |W(i)\omega| = 20 \lg A(\omega). \quad (8.58)$$

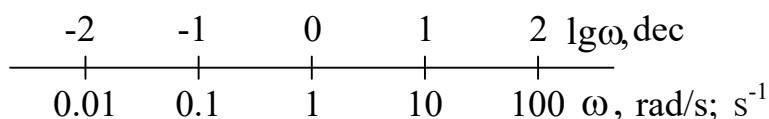
Тази величина се измерва в *децибели* dB. Бел представлява логаритмична единица, съответстваща на десетократното увеличение на мощността. Един бел съответства на увеличението на мощността 10 пъти, 2 В – 100 пъти, 3 В – 1000 и т. н. Децибела е една десета част от бела. Ако $A(\omega)$ е отношение на мощности то пред логаритъма в () трябва да се постави множителя 10. Тъй като $A(\omega)$ представлява не отношение на мощности, а на изходна към входна величина /скорост, преместване, налягане, дебит, напрежение и др./, то увеличението на това отношение десет пъти, ще съответства на увеличението на мощността 100 пъти, което съответства на 2 бела или 10 децибела. Затова в дясната част на () стои множителя 20. Положителните стойности съответстват на усилване на сигнала, а отрицателните стойности на намаляване.

Един децибел представлява изменение на амплитудата $\sqrt[20]{10}$, т. е. представлява сравнително малка величина. В натурален мащаб 1 dB е равен на усилване 1.12 пъти.

Необходимостта от логаритмуване на модула на честотно предавателната функция, води до това, че строго погледната ЛАЧХ може да се строи само за тези звена, при които предавателната функция представлява безразмерна величина. Това е възможно само при еднакви размерности на входната и изходна величина.

ЛАЧХ може условно да се строи и за тези звена, при които предавателната функция има размерност. В този случай фиксирана стойност на изходната величина се приема за единица, а под стойността на $A(\omega)$ се разбира отношението на модула на честотно предавателната функция към тази изходна единица.

При построяването на логаритмичните характеристики по абсцисата се нанася ъгловата честота в логаритмичен мащаб, т. е. нанася се скала съответстваща на $\lg \omega$ и се пише стойността на честотата ω в rad/s или s^{-1} . *Декада* се нарича интервал на честотата, съответстващ на изменението на честотата 10 пъти. В логаритмичната скала декадата се изобразява с отсечка с единична дължина, защото $\lg 10\omega - \lg \omega = 1$. За това относно величината $\lg \omega$ логаритмичната скара е равномерна, а за честотата ω - неравномерна – фиг. 8.9. Използва се и деление на скалата в *октави*. Октавата съответства на удвояване на честотата.



Фиг. 8.9. Логаритмична скала

По ординатната ос се нанася модула в dB в равномерен мащаб. Абцисната ос преминава през точката 0 dB, което съответства на $A(\omega) = 1$ / защото $\lg 1 = 0$ /.

Горната полуравнина на ЛАЧХ съответства на усилване по амплитуда $A(\omega) > 1$, а долната на намаляване $A(\omega) < 1$.

Ординатната ос може да пресича абцисната в произволно място. Точката $\omega = 0$ лежи наляво в безкрайността, защото $\lg 0 = -\infty$. Ординатната ос се построява, така че наядно от нея да може да се построи целия ход на ЛАЧХ.

При построяване на логаритмичната фазочестотна характеристика ЛФЧХ логаритмичната скала е само по оста на честотата, а по ординатната ос се използва натурален мащаб в ъглови градуси. В практиката при изобразяването на ЛАЧХ и ЛФЧХ се използва една и съща ос на честотите, като се съвместява точката -180° на ординатната ос от ЛФЧХ с точката 0 dB от ЛАЧХ. Отрицателното дефазирание се нанася нагоре по ординатната ос, а положителното – надолу.

Използването на логаритмичните честотни характеристики има различни преимущества. Едното от тях произтича от свойството на логаритмите: логаритъм от произведението на няколко величини е равен на сума от логаритмите на тези величини. Това свойство улеснява построяването на резултиращите честотни характеристики на последователно свързани звена.

Като се логаритмува изразът $A(\omega) = \prod_{k=1}^N A_k(\omega)$, се получава израз

$$\lg A(\omega) = \lg \prod_{k=1}^N A_k(\omega). \quad (8.59)$$

Който като се използва споменатото свойство на логаритмите може да се представи

$$\lg A(\omega) = \sum_{k=1}^N \lg A_k(\omega). \quad (8.60)$$

Следователно

$$l(\omega) = \sum_{k=1}^N L_k(\omega). \quad (8.61)$$

Друго преимущество на логаритмичните характеристики е, че те могат да се построят практически без изчислителна работа. Това се прилага, когато предавателната функция може да се представи като произведение на множители. Тогава резултиращата ЛАЧХ може да се намери чрез сумиране на ординатите на отделните ЛАЧХ на множителите. Логаритмичната скала съществено намалява кривината на амплитудните характеристики на звената. Често не се налага такова сумиране и резултиращата ЛАЧХ може да се построи приблизително като асимптотична ЛАЧХ, представляваща съвкупност от отрезки от прави линии с наклони, кратни на 20 dB/dec.

Разглеждат се няколко елементарни случая на построяване на логаритмични честотни характеристики.

1. Модула на честотно предавателната функция е равен на постоянно число, константа $A(\omega) = k_0$. Тогава

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k_0. \quad (8.62)$$

ЛАЧХ представлява права, успоредна на абцисната ос /права 1 на фиг. 8.10/.

2. Разглежда се случая, когато $A(\omega) = \frac{k_1}{\omega}$. Тогава

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k_1}{\omega} = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega. \quad (8.63)$$

Може да се види, че това е права линия преминаваща през точката $\omega = 1 \text{ rad/s; } s^{-1}$ и $L(\omega) = 20 \lg k_1$ и имаща отрицателен наклон - 20 dB/dec /права 2 на фиг. 8.10/. Това се пояснява от следното съотношение $20[\lg 10\omega - \lg \omega] = 20$ - десетократното увеличение на честотата води до увеличаване на $\lg \omega$ с единица, т. е. намаление на $L(\omega)$ с 20 dB/dec. Наклона 20 dB/dec е приблизително равен на 6 dB/oct /по-точно на 6.06 dB/oct, защото $\lg 2 = 3.03$ /.

Точката на пресичане с оста 0 dB /оста на честотата/ може да се намира, като се положи $L(\omega) = 0$, което съответства на $A(\omega) = 1$. От тук се получава срязващата честота на ЛАЧХ, която в този случай е равна на $\omega_{cp} = k_1$.

3. По аналогичен начин може да се покаже, че в случая, когато $A(\omega) = \frac{k_2}{\omega^2}$

ЛАЧХ представлява права с отрицателен наклон -40 dB/dec /правата 3 на фиг. 8.10/.

4. За $A(\omega) = \frac{k_n}{\omega^n}$ ЛАЧХ представлява права с отрицателен наклон $n \cdot 20$ dB/dec

или $n \cdot 6$ dB/oct. Тази права може да се построи по една произволно точка, например за $\omega = 1 \text{ rad/s; } s^{-1}$ и $L(\omega) = 20 \lg k_n$ или по срязващата честота $\omega_{cp} = \sqrt[n]{k_n}$.

5. Разглежда се случай, когато $A(\omega) = k_3 \omega$. Тогава

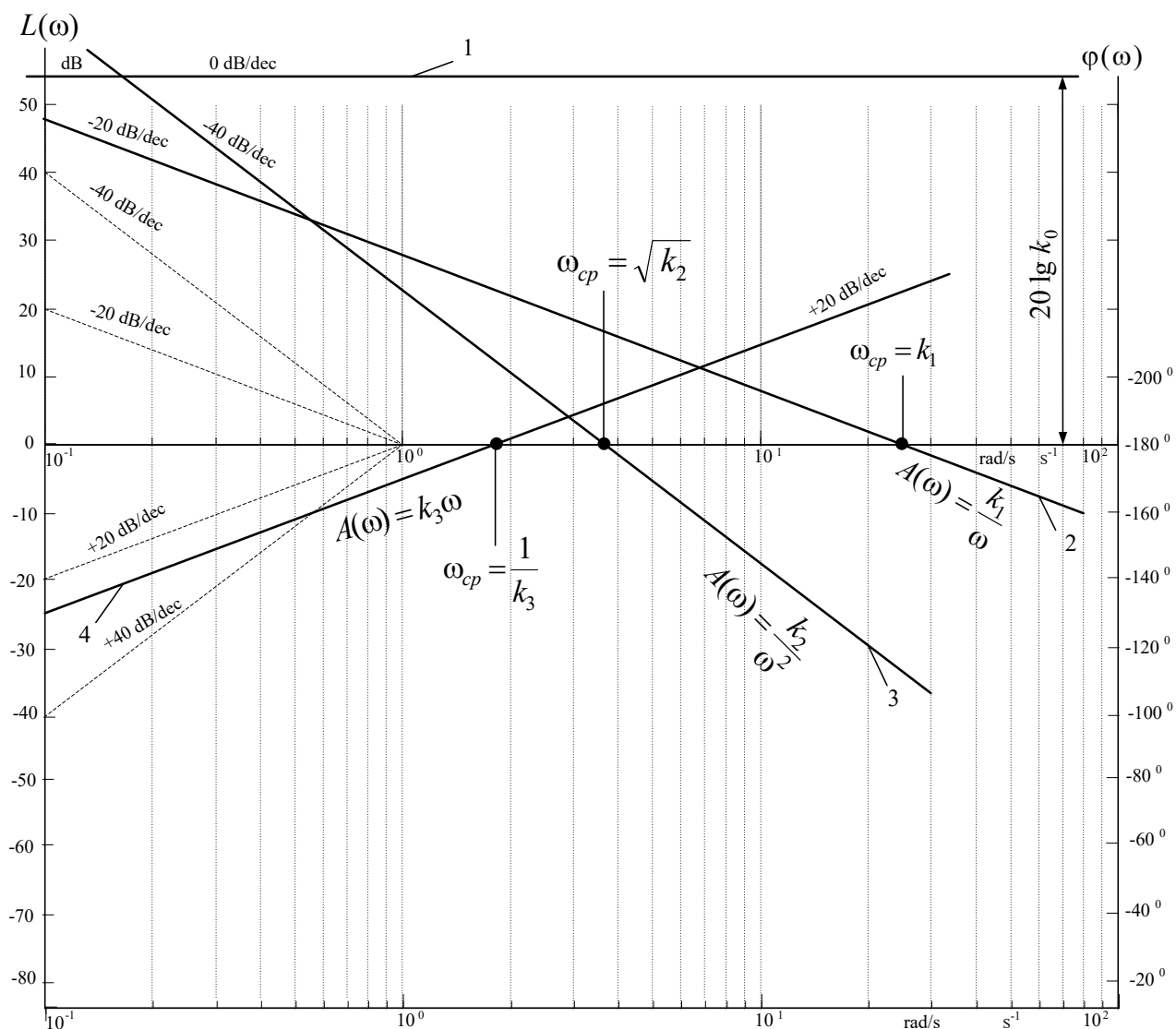
$$L(\omega) = 20 \lg k_3 \omega = 20 \lg k_3 + 20 \lg \omega$$

Вижда се, че това е права линия, преминаваща през точката $\omega = 1 \text{ rad/s; } s^{-1}$ и $L(\omega) = 20 \lg k_3$ и имаща положителен наклон - 20 dB/dec.

Тази права може да се построи и по срязващата честота $\omega_{cp} = \frac{1}{k_3}$, получена от $A(\omega) = 1$ /линия 4 на фиг. 8.10/.

6. Аналогично за $A(\omega) = k_m \omega^m$ ЛАЧХ представлява права с положителен наклон $m \cdot 20$ dB/dec или $m \cdot 6$ dB/oct. Тази права може да се построи по една

произволно точка, например за $\omega = 1 \text{ rad/s; s}^{-1}$ и $L(\omega) = 20k_m$ или по срязващата честота $\omega_{cp} = \frac{1}{\sqrt[m]{k_m}}$.



Фиг. 8.10. Логаритмични координати и амплитудни и фазови характеристики

При логаритмичната скала мащаба по оста на честотите автоматично пада с увеличаване на честотата. Това позволява на една графика да се обхване целия интересуваш ни диапазон на честотите, с детайлна разработка на характера на честотните характеристики в областта на ниските честоти, тъй като най-често те представляват интерес.

ГЛАВА 9.

ЕЛЕМЕНТАРНИ /ТИПОВИ/ ДИНАМИЧНИ ЗВЕНА И ТЕХНИТЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Елементарни /типови/ динамични звена се наричат звена, описващи се с диференциално уравнение не по-високо от втори ред. Това са голям брой механични, електрически, хидравлични, пневматични, топлинни и други елементи и устройства, използване в системите на автоматиката. Всяко друго звено, диференциалното уравнение на което е с по-висок от втори ред, се представя като комбинация от елементарни звена, свързани по определен начин.

При създаване на обща методика за изследване на всяка САР, класификацията на елементите се извършва не по тяхното конструктивно изпълнение, функционално предназначение или други признаци, а по вида на диференциалното уравнение с което се описва динамиката тези елементи, техните динамични свойства. Такъв подход при класификацията на системите за автоматично регулиране дава възможност да се сведе голямото многообразие към ограничен брой елементарни /типови/ звена, които имат определящо значение при изграждането на структурните схеми на автоматичните системи, така и при анализа на техните статични и динамични характеристики.

Всички типове звена могат да се разделят на три основни групи:

- Позиционни
- Интегриращи
- Диференциращи

Всяка от групите на свой ред съдържа няколко типови звена. В таблица 9.1 са показани елементарните динамични звена.

9.1. Позиционни звена

Позиционните звена се наричат звена, за които в установен режим е характерна линейна зависимост между входната и изходната величина. Те се описват с линейни диференциални уравнение от вида

$$c(p)x_2 = kx_1. \quad (9.1)$$

Където $c(p)$ е многочлен не по-висок от втори ред, k - коефициент на предаване на звеното. Коефициента на пропорционалност или предавателния коефициент може да бъде с дименсия или без дименсия. В случая, когато входното и изходно звено имат една и съща дименсия и $k > 1$, той се нарича коефициент на усилване, а самото звено носи името усилвателно звено.

9.2. Идеално /безинерционно/ звено

Уравнението на това звено е алгебрично

$$x_2 = kx_1. \quad (9.2)$$

Табл. 9.1 Елементарни динамични звена

№	Група	Тип на звеното	Вид на диференциалното уравнение
1	Позиционни	Пропорционално /безинерционно/	$x_2 = k x_1$
2		Апериодично от 1 ред	$(Tp + 1)x_2 = k x_1$
3		Апериодично от 2 ред	$(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)x_2 = k x_1$ $1 \leq \xi < \infty$
4		Колебателно	$(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)x_2 = k x_1$ $0 < \xi < 1$
5		Консервативно	$(T^2 p^2 + 1)x_2 = k x_1$
6	Интегриращи	Идеално интегриращо	$x_2 = \frac{k}{p} x_1$
7		Интегриращо със закъснение	$(Tp + 1)x_2 = \frac{k}{p} x_1$
8		Изодромно	$px_2 = (k + k_1 p)x_1$
9	Диференциращи	Идеално диференциращо	$x_2 = k p x_1$
10		Диференциращо със закъснение	$(Tp + 1)x_2 = k p x_1$
11	Форсиращи	Форсиращо от 1 ред	$x_2 = (Tp + 1)x_1$
12		Форсиращо от 2 ред	$x_2 = (T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)x_1$

Това показва, че това звено предава сигнала мигновено, без динамичен преходен процес и изкривяване на входния сигнал. Пример за пропорционално звено може да е потенциометричен датчик, лостови механизми, зъбни предавки.

Предавателната функция е

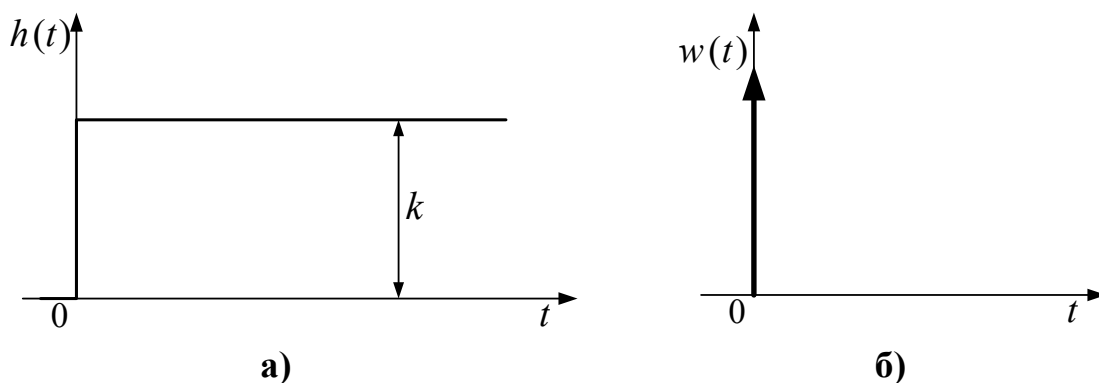
$$W(s) = k. \quad (9.3)$$

Преходната характеристика се определя от

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = L^{-1} \left[\frac{k}{s} \right] = k 1(t). \quad (9.4)$$

Преходната характеристика на пропорционалното звено представлява мащабирана с коефициента k единична стъпална функция – фиг. 9.1 а. Тегловната характеристика се получава след диференциране на преходната характеристика и представлява мащабирана делта функция фиг. 9.1 б.

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d[k 1(t)]}{dt} = k \frac{d1(t)}{dt} = k \delta(t). \quad (9.5)$$

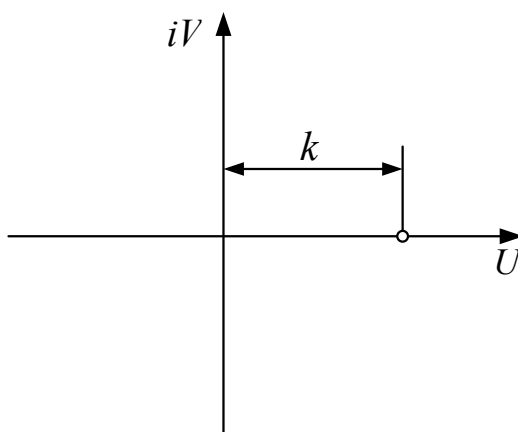


Фиг. 9.1 Преходна - а) и тегловна б) характеристика на идеално пропорционално звено.

Честотните характеристики могат да се представят по следния начин:

Честотно предавателна функция

$$W(i\omega) = W(s)_{s=i\omega} = k. \quad (9.6)$$



Фиг. 9.2 Амплитудо фазо честотна характеристика на идеално пропорционално звено

Реална и имагинерна част на честотно предавателната функция

$$U(\omega) = \operatorname{Re}\{W(i\omega)\} = k,$$

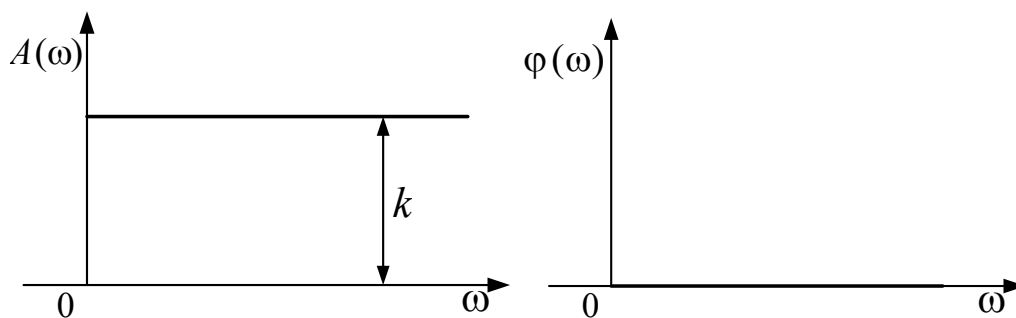
$$V(\omega) = \operatorname{Im}\{W(i\omega)\} = 0.$$

Амплитудо-честотна характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = k. \quad (9.7)$$

Фазо-честотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{0}{k} = 0. \quad (9.8)$$

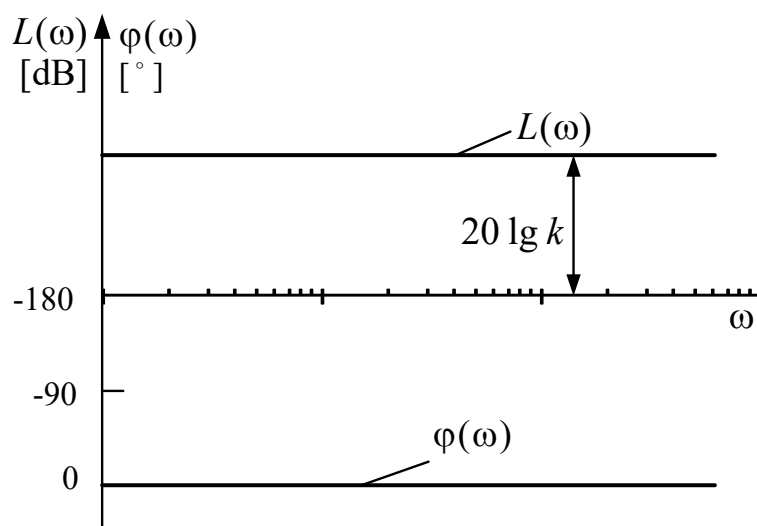


Фиг. 9.3 АЧХ и ФЧХ на идеално пропорционално звено

Логаритмичната амплитудочестотна характеристика ЛАЧХ се получава, като се логаритмува амплитудочестотната характеристика АЧХ.

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k. \quad (9.9)$$

Графично тази характеристика е показана на фиг. 9.4., където по ординатната ос е нанесена $L(\omega)$ в децибели, а по абсисната ос честотата ω в логаритмичен мащаб



Фиг. 9.4 ЛАЧХ на идеално пропорционално звено

От уравнение (9.9) се вижда, че $L(\omega)$ не зависи от честотата и ЛАЧХ представлява права линия, успоредна на абсисната ос на разстояние $20 \lg k$ децибела от нея.

Логаритмичната фазочестотна характеристика ЛФЧХ се определя от (9.8).

9.3. Апериодично звено от 1 ред

За разлика от идеалното пропорционално звено, в апериодичните звена от 1 ред са отчетени инерционните сили. Уравнението на такива звена е

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k x_1. \quad (9.10)$$

където T е времекопстанта, k - предавателния коефициент на звеното.

Предавателната функция е

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}. \quad (9.11)$$

Преходната характеристика се определя от

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = L^{-1} \left[\frac{k}{s(Ts + 1)} \right] =.$$

Преобразува се

$$\frac{k}{s(Ts + 1)} = \frac{k}{T} \frac{1}{s(s + \frac{1}{T})} = \frac{k}{T} \left(\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + \frac{1}{T})} \right).$$

Корените на характеристичното уравнение са

$$s_1 = 0; \quad s_2 = -\frac{1}{T}.$$

Коефициентите се определят

$$A_1 = \left[(s - s_1) \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_1=0} = \left[s \frac{k}{s(Ts + 1)} \right]_{s=0} = k,$$

$$A_2 = \left[(s - s_2) \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_2=-\frac{1}{T}} = \left[\frac{\left(s + \frac{1}{T} \right) k}{-T \frac{1}{T} \left(s + \frac{1}{T} \right)} \right]_{s=-\frac{1}{T}} = -k.$$

Следователно

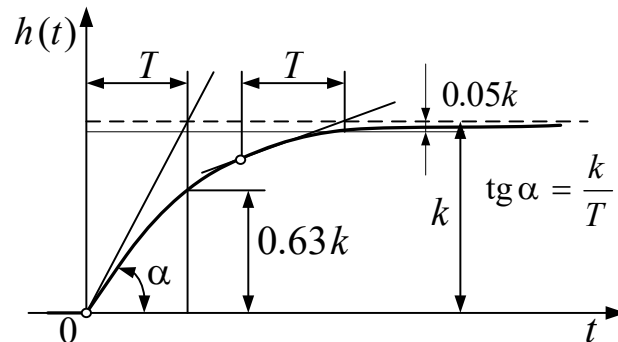
$$\frac{k}{s(Ts + 1)} = k \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \frac{1}{T})} \right).$$

След използване таблицата за Лапласовите преобразувания за преходната функция се получава:

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t). \quad (9.12)$$

Графиката на преходната функция е показана на фиг. 9.5. това е експонента. Вижда се, че свойствата на апериодичното звено зависят от T времекопстантата и k - предавателния коефициент на звеното. Характерът на тази крива показва, че при стъпално изменение на входната величина, изходната величина на апериодичното звено не се променя мигновено /както е

при идеалното пропорционално звено/ а достига установената стойност след изтичане на определено време, в течение на което се натрупва вещество или енергия във звеното.



Фиг. 9.5 Преходна характеристика на аperiодично звено

Времеkonстантата T може да се дефинира като времето, за което изходната величина би достигнала новата си установена стойност, ако се изменяше по време на преходния процес с постоянна скорост, равна на скоростта в началния момент на процеса. Графично, времеkonстантата може да се отчете, като се намери проекцията на допирателната към коя да е точка от преходната характеристика върху хоризонталната права. Тъй като

$$\frac{dh(t)}{dt} = w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (9.13)$$

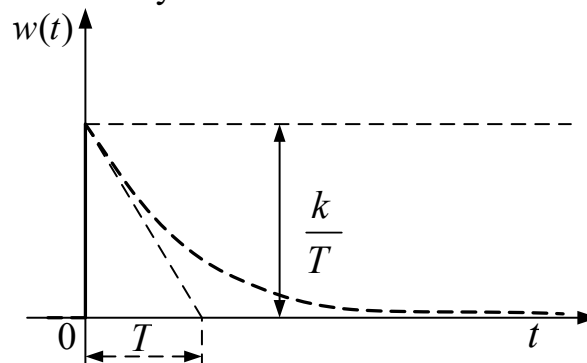
определя тегловната функция или наклона на тангентата в коя да е точка от кривата, при $\frac{dh(0)}{dt} = \frac{k}{T} = \operatorname{tg} \alpha$ или

$$T = \frac{k}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (9.14)$$

Ако в уравнението (9.12) се замести $t = T$ се получава

$$h(T) = k(1 - e^{-1}) \cong 0.63k. \quad (9.15)$$

Времеkonстантата може да се определи чрез времето за което преходната функция достига 63% от своята установена стойност.



Фиг. 9.6 Тегловна характеристика на аperiодично звено

Теоретично преходния процес на аperiодичното звено завършва след безкрайно дълго време $t \rightarrow \infty$. Практически за времето на преходния процес се приема най-малкия интервал от време, за което се изпълнява неравенството

$$k - h(t) \leq \Delta, \quad (9.16)$$

където е предварително зададено число $\Delta = (0.01 \div 0.05)k$.

Времето за преходния процес /времето за което изходната величина практически е равна на новата установена стойност $h \leq 0.95k$ е приблизително

$$t_s \approx 3T. \quad (9.17)$$

Честотните характеристики могат да се представят по следния начин:

Честотно предавателна функция

$$W(i\omega) = W(s)_{s=i\omega} = \frac{k}{1 + T(i\omega)}. \quad (9.18)$$

След умножаване на числителя и знаменателя на уравнение (9.18) с $1 - T(i\omega)$ се получава

$$W(i\omega) = \frac{k[1 - T(i\omega)]}{[1 + T(i\omega)][1 - T(i\omega)]} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - i \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Тогава реална и имагинерна част на честотно предавателната функция

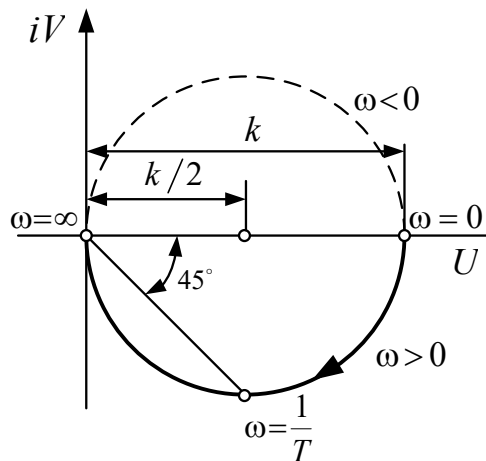
$$U(\omega) = \operatorname{Re}\{W(i\omega)\} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1},$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im}\{W(i\omega)\} = -\frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

От последните две уравнения може да се напише уравнението за АФЧХ във вида:

$$\left[U(\omega) - \frac{k}{2}\right]^2 + V^2(\omega) = \frac{k^2}{4}.$$

Кое то за изменение на честотата $\omega = 0 \rightarrow \infty$ представлява уравнение на полуокръжност в комплексната равнина $[U(\omega), iV(\omega)]$ с център $\left(\frac{k}{2}, i0\right)$ и диаметър равен на k - фиг. 9.7. АФЧХ за отрицателните честоти представлява огледално отражение -показана с пунктирна линия на фиг. 9.7.



Фиг. 9.7 АФЧХ на апериодично звено от 1 ред

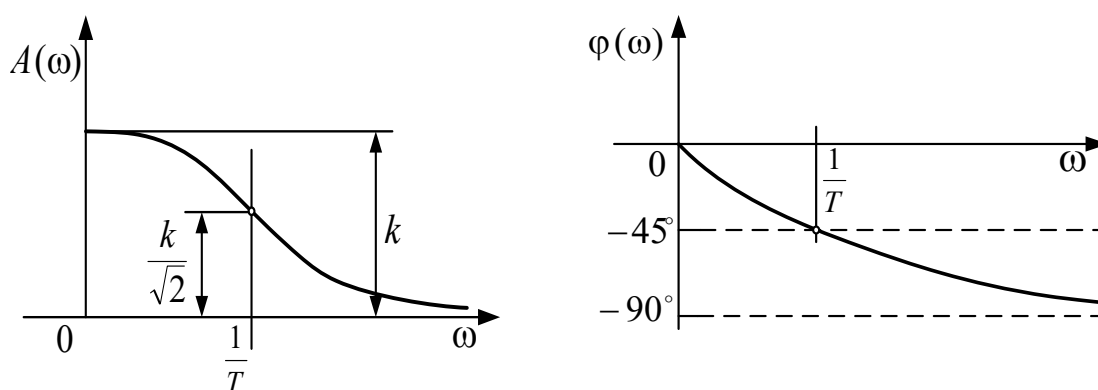
Амплитудочестотна характеристика на апериодичното звено ще бъде

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{k}{T^2\omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}\right)^2} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}. \quad (9.19)$$

Фазочестотна характеристика на апериодичното звено е:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg(-T\omega) = -\arctg(T\omega). \quad (9.20)$$

Последните две характеристики са показани на фиг. 9.8.



Фиг. 9.8 АЧХ и ФЧХ на апериодично звено от 1 ред

От получените честотни характеристики се вижда, че апериодичното звено от 1 ред пропуска хармонични колебания с ниски честоти. Амплитудата на изходния сигнал при увеличаване на честотата на входния сигнал намалява, а фазовото закъснение се увеличава.

Колебанията с ниска честота $\left(\omega < \frac{1}{T}\right)$ се пропускат с отношение на амплитудите на изходната към входната величина, близко да статичния коефициент на усилване k . Колебанията с по-висока честота $\left(\omega > \frac{1}{T}\right)$ преминават със силно отслабване на амплитудата. Колкото е по малка времеконстантата, толкова е по-малка инерциоността на звеното и по-широка е зоната на пропускане на честотите.

Логаритмичната амплитудочестотна характеристика ЛАЧХ се получава, като се логаритмува амплитудочестотната характеристика АЧХ, определена от (9.19).

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} \quad (9.20)$$

По това уравнение се построява точната ЛАЧХ

Вижда се, че ЛАЧХ може да се раздели на две съставляващи:

$$L_1(\omega) = 20 \lg k, \quad (9.21)$$

$$L_2(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}. \quad (9.22)$$

Първата съставляваща съответства на ЛАЧХ на пропорционално звено и представлява права успоредна на абцисната ос на разстояние $20 \lg k$.

За втората съставляваща може да се напише

$$L_2(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} = \begin{cases} L_2(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{1} = 0 & T^2 \omega^2 \ll 1 \\ L_2(\omega) \approx -20 \lg T\omega & T^2 \omega^2 \gg 1 \\ L_2(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{2} = -3 \text{ dB} & T^2 \omega^2 = 1 \end{cases} \quad (9.23)$$

От (9.23) следва, че втората съставка на ЛАЧХ $L_2(\omega)$ може да се апроксимира с помощта на две прави линии /асимптоти/, които се пресичат в точка с честота

$$\omega_0 = \frac{1}{T} \quad (9.24)$$

Тази честота се нарича спрегната или опорна честота на ЛАЧХ.

Следователно нискочестотната асимптота $L_2(0)$ представлява права линия, която съвпада с абцисната ос с уравнение

$$L_2(0) \approx -20 \lg \sqrt{1} = 0. \quad (9.25)$$

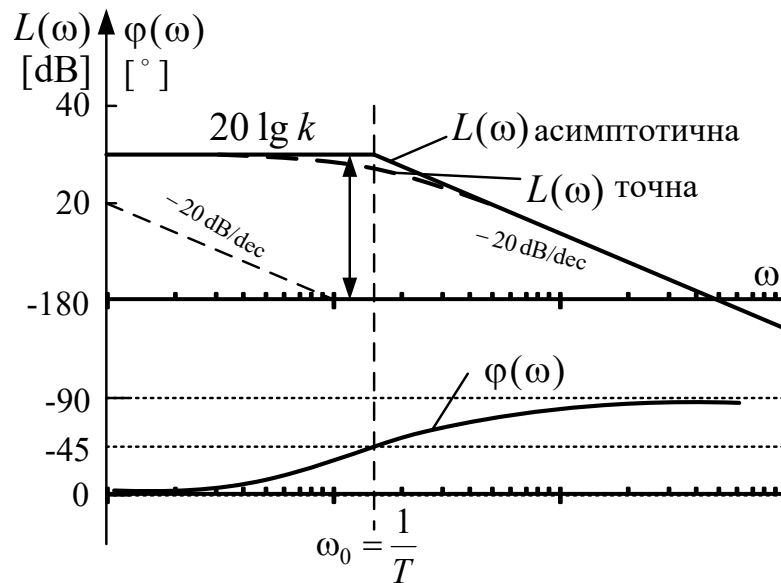
Уравнението на високочестотната асимптота според уравнение (9.23) аналогично е

$$L_2(\infty) \approx -20 \lg T\omega. \quad (9.26)$$

Високочестотната асимптота пресича абцисната ос в точката $\omega_0 = \frac{1}{T}$ и е наклонена спрямо нея. Наклонът се определя, като се има в предвид, че при честота $\omega = \omega_1$ ординатата на линията ще бъде $-20 \lg T\omega_1$, при честота $\omega_2 = 10\omega_1$ ще бъде $-20 \lg T\omega_2 = -20 \lg T10\omega_1$. За разликата между ординатите се получава

$$-(20 \lg T10\omega_1 - 20 \lg T\omega_1) = -20 \lg \frac{10T\omega_1}{T\omega_1} = -20 \lg 10 = -20 \text{ dB/dec}. \quad (9.27)$$

На фиг. 9.9 е показана ЛАЧХ на апериодичното звено от 1 ред. С плътна линия я асимптотичната характеристика, а с прекъснатата е точната. Грешката е най-голяма при $\omega_0 = \frac{1}{T} - 3 \text{ dB}$.



Фиг. 9.9 ЛАЧХ и ЛФЧХ на аperiodично звено от 1 ред

Логаритмичната фазово-честотна характеристика се определя от уравнението $\varphi(\omega) = -\arctg(T\omega)$. При ниски честоти ($\omega \rightarrow 0$) се получава $\varphi(0) = 0^\circ$, а при високи честоти ($\omega \rightarrow \infty$) - $\varphi(\infty) = -90^\circ$. За спрегнатата честота $\left(\omega_0 = \frac{1}{T}\right)$ се получава стойност $\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -45^\circ$.

9.4. Аperiodично звено от 2 ред

Физическо устройство от произволен вид, което се описва с диференциално уравнение от вида:

$$T^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k x_1. \quad (9.28)$$

където $1 \leq \xi < \infty$ - коефициент на относително демпфериране, T - времеkonстанта се нарича аperiodично звено от 2 ред.

Предавателната функция на това звено е:

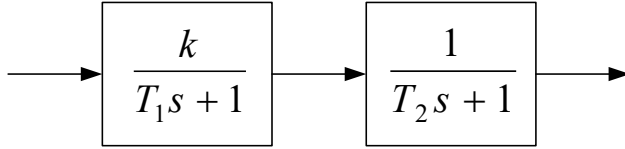
$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}. \quad (9.29)$$

Условието $1 \leq \xi < \infty$ гарантира, че корените на характеристичното уравнение са реални и следователно знаменателя може да се разложи на два множителя

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (9.30)$$

където $T_1 = -\frac{1}{s_1} = \frac{T}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}$; $T_2 = -\frac{1}{s_2} = \frac{T}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}$; $T_1 > T_2 / s_1$ и s_2 са корени на характеристичното уравнение $T^2 s^2 + 2\xi T s + 1 = 0$.

Следователно апериодичното звено от 2 ред е еквивалентно на две последователно свързани апериодични звена от 1 ред,, общ коефициент на предаване k и времеконстанти T_1 и T_2 . Може да се представи със следната структурна схема:



$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)} \frac{1}{(T_2s + 1)}$$

$$W_1(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)}; \quad W_2(s) = \frac{1}{(T_2s + 1)},$$

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = k L^{-1} \left[\frac{1}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \right]. \quad (9.31)$$

Разглежда се случая, когато $T_1 > T_2$ / $\xi > 1$ /. Дробта в скобите на изрази (9.31) може да се представи по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} &= \frac{1}{T_1 T_2} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right)} = \\ &= \frac{1}{T_1 T_2} \left[\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{\left(s + \frac{1}{T_1} \right)} + \frac{A_3}{\left(s + \frac{1}{T_2} \right)} \right] \end{aligned} \quad (9.32)$$

Корените на характеристичното уравнение са

$$s_1 = 0; \quad s_2 = -\frac{1}{T_1}; \quad s_3 = -\frac{1}{T_2}.$$

Коефициентите се определят

$$A_1 = \left[(s - s_1) \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_1=0} = \left[s \frac{1}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \right]_{s=0} = 1,$$

$$A_2 = \left[(s - s_2) \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_2=-\frac{1}{T_1}} = \left[\frac{\left(s + \frac{1}{T_1} \right)}{T_1 T_2 s \left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right)} \right]_{s=-\frac{1}{T_1}} = -\frac{T_1}{T_1 - T_2},$$

$$A_3 = \left[(s - s_3) \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=s_3=-\frac{1}{T_2}} = \left[\frac{\left(s + \frac{1}{T_2} \right)}{T_1 T_2 s \left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right)} \right]_{s=-\frac{1}{T_2}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

Заместват се коефициентите в (9.32) и се получава:

$$\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T_1} \right)} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T_2} \right)}. \quad (9.33)$$

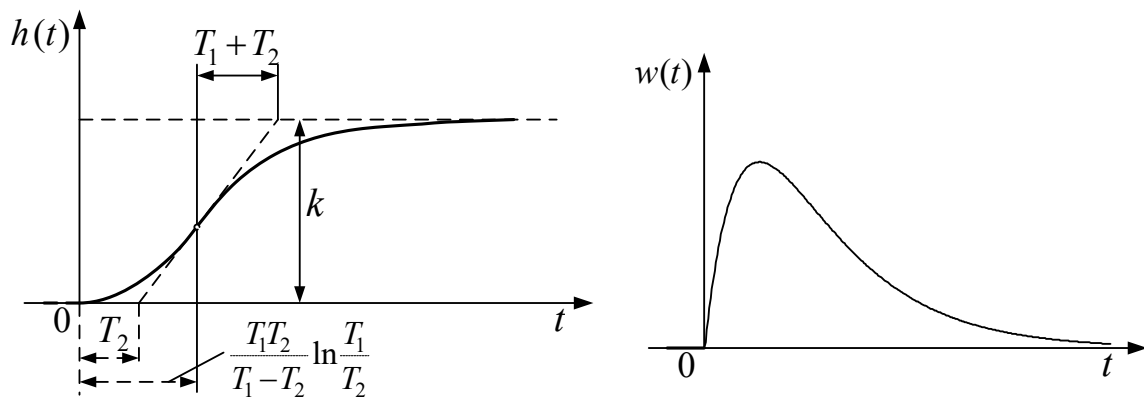
Прилага се обратното Лапласово преобразуване върху (9.33) и се получава:

$$h(t) = k \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right] 1(t). \quad (9.34)$$

Тегловната функция се получава:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right). \quad (9.35)$$

Преходната характеристика по уравнение (9.34) и тегловна характеристика по (9.35) са построени на фиг. 9. 10.



Фиг. 9.10 Преходна и тегловна характеристики на апериодично звено от 2 ред

При $T_1 = T_2 = T$ / $\xi = 1$ / се получава:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = k L^{-1} \left[\frac{1}{s(Ts+1)^2} \right] \quad (9.36)$$

Дробта в скобите на изрази (9.36) може да се представи по следния начин:

$$\frac{1}{s(Ts+1)^2} = \frac{1}{T^2} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{T} \right)^2} = \frac{1}{T^2} \left[\frac{A_1}{s} + \frac{K_1}{\left(s + \frac{1}{T} \right)} + \frac{K_2}{\left(s + \frac{1}{T} \right)^2} \right] \quad (9.37)$$

Корените на характеристичното уравнение са

$$s_1 = 0; \quad s_2 = s_3 = -\frac{1}{T};$$

$$A_1 = \left[(s - s_1) \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=0} = \left[s \frac{1}{T^2} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{T} \right)^2} \right]_{s=0} = 1,$$

$$K_2 = \left[(s - s_i)^2 \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=-\frac{1}{T}} = \left[\left(s + \frac{1}{T} \right)^2 \frac{1}{T^2} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{T} \right)^2} \right]_{s=-\frac{1}{T}} = -1,$$

$$K_1 = \frac{d}{ds} \left[(s - s_i)^2 \frac{b(s)}{a(s)} \right]_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s T^2} \right]_{s=-\frac{1}{T}} = -1.$$

Прилага се обратното лапласово преобразуване за преходната функция се получава:

$$h(t) = k \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}} \right] 1(t). \quad (9.38)$$

Съответната тегловна характеристика е:

$$w(t) = \frac{k}{T} t e^{-\frac{t}{T}}. \quad (9.39)$$

Честотни характеристики

Определянето на честотните характеристики на апериодичното звено от 2 ред може да стане, като последователно свързани две апериодични звена от 1 ред.

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega) = \frac{k}{(T_1j\omega + 1)} \frac{1}{(T_2j\omega + 1)} \quad (9.40)$$

$$W_1(j\omega) = \frac{k}{(T_1j\omega + 1)}; \quad W_2(j\omega) = \frac{1}{(T_2j\omega + 1)}$$

АФЧХ на апериодичното звено от 2 ред е показана на фиг. 9.11.

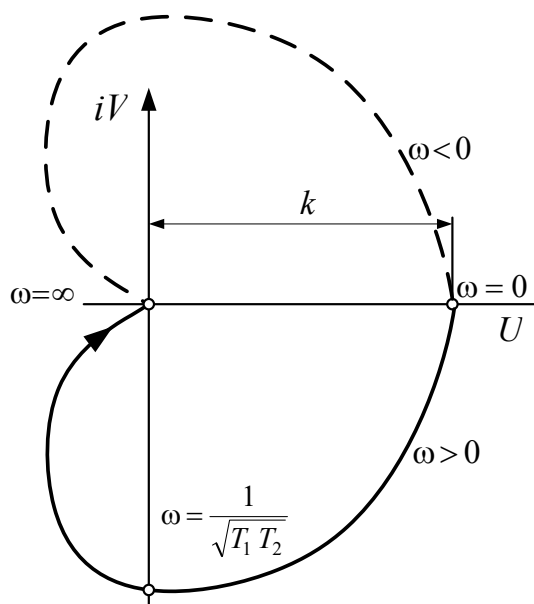
При последователно свързване амплитудочестотните характеристики се получават като произведение от амплитудните характеристики на отделните звена

$$A(\omega) = A_1(\omega) A_2(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}} \quad (9.41)$$

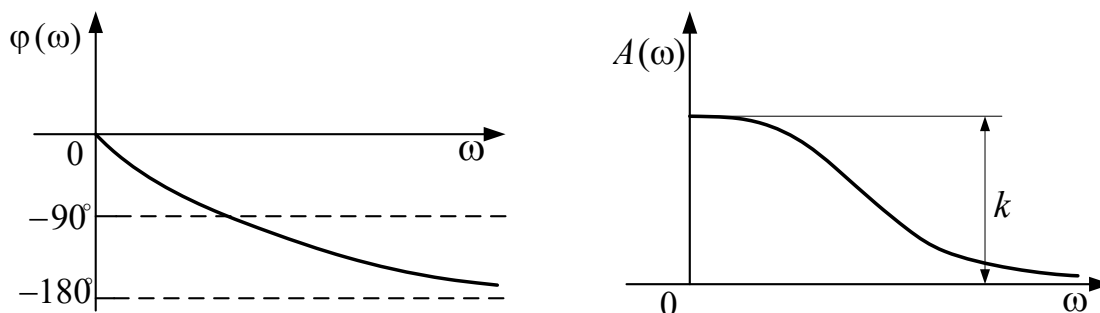
Фазовата характеристика е сумата от фазовите характеристики на отделните звена:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = -\arctg(T_1\omega) - \arctg(T_2\omega) \quad (9.42)$$

АЧХ и ФЧХ на апериодично звено от 2 ред са показани на фиг. 9.12.



Фиг. 9.11 АФЧХ на апериодично звено от 2 ред



Фиг. 9.12 АЧХ и АФХ на апериодично звено от 2 ред

Логиритмично честотни характеристики

Построяването на асимптотичната ЛАЧХ се прави аналогично на построяването на ЛАЧХ на апериодичното звено от 1 ред. Първоначално се определят спрягащите честоти и се отбелязват върху графиката с вертикални прави линии:

$$\omega_{0,1} = \frac{1}{T_1}; \quad \omega_{0,2} = \frac{1}{T_2}; \quad \omega_{0,1} < \omega_{0,2}; \quad T_1 > T_2, \quad (9.43)$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}. \quad (9.44)$$

Наляво от първата спрягаща честота $\omega < \omega_{0,1} = \frac{1}{T_1}$ този израз се заменя с приблизително с

$$L(\omega) \approx 20 \lg k, \quad (9.45)$$

на който съответства права с нулев наклон – това е първата асимптота на ЛАЧХ.

За честотите $\omega_{0,1} = \frac{1}{T_1} < \omega < \omega_{0,2} = \frac{1}{T_2}$ изразът (9.44) се заменя с приблизителния

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega T_1}, \quad (9.46)$$

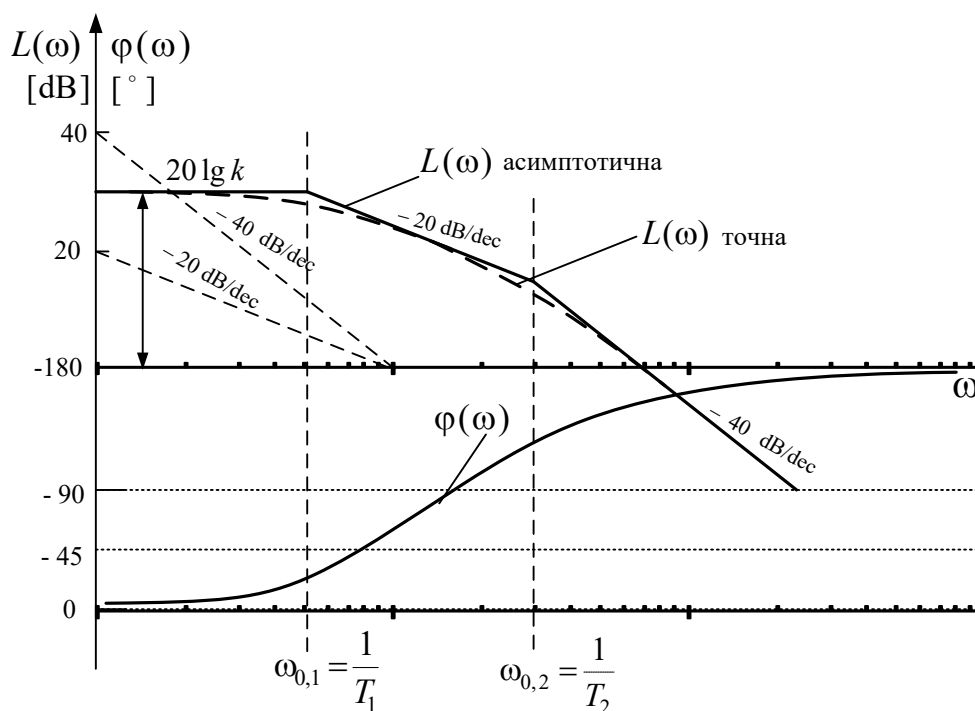
на който съответства права с отрицателен наклон -20 dB/dec. – втората асимптота.

За честотите $\omega > \omega_{0,2} = \frac{1}{T_2}$ изразът (9.44) се заменя с приблизителния

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{k}{\omega^2 T_1 T_2}, \quad (9.47)$$

на който съответства права с отрицателен наклон -40 dB/dec. – третата асимптота.

На фиг. 9.13 са показани ЛАЧХ и ЛФЧХ на апериодично звено от 2 ред. Действителната ЛАЧХ е показана с пунктирна линия, отличава се от асимптотичната в точките на промяна на наклона с 3 dB.



Фиг. 9.13 ЛАЧХ и ЛАФХ на аperiodично звено от 2 ред

9.5. Колебательно звено

Физическо устройство от произволен вид, което се описва с диференциално уравнение от вида:

$$T^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k x_1. \quad (9.48)$$

където $0 \leq \xi < 1$ - коефициент на относително демпфериране, T - времеконстанта се нарича колебательно звено.

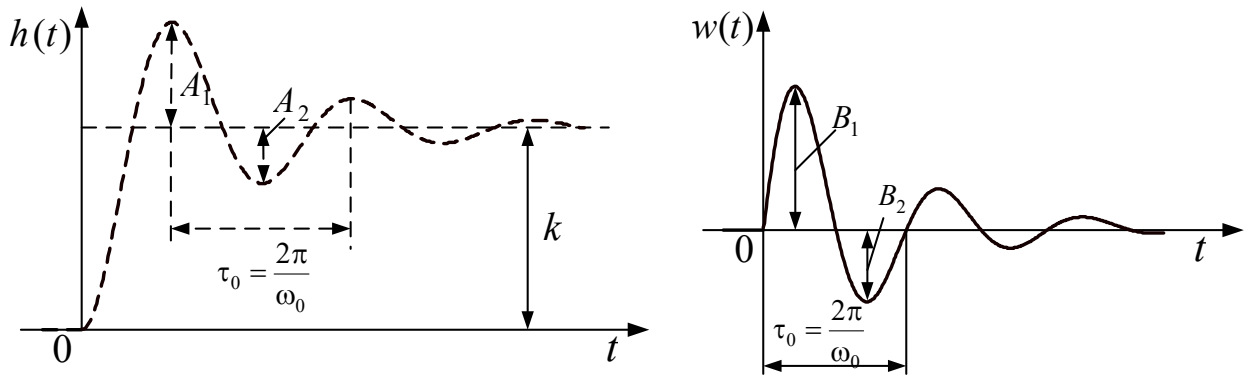
Предавателната функция на това звено е:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}. \quad (9.49)$$

Условието $0 \leq \xi < 1$ гарантира, че корените на характеристичното уравнение са комплексно спрегнати.

Собствената честота се дефинира като $\omega_n = \frac{1}{T}$ и тогава предавателната функция може да се запише във вида:

$$W(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}. \quad (9.50)$$



Фиг. 9.14 Преходна и тегловна характеристики на колебателно звено

Преходната характеристика се определя от:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = k L^{-1} \left[\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)} \right]. \quad (9.51)$$

Корените s_1 и s_2 на характеристичното уравнение $T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0$ са:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{T} \left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right).$$

Поради факта, че $0 \leq \xi < 1$ корените на характеристичното уравнение са комплексно спрегнати и се представят във вида:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\alpha \pm j\beta = -\frac{\xi}{T} \pm j \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \text{ или} \\ s_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_0. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Величината $\alpha = -\frac{\xi}{T}$ характеризира бързината на затихване на колебанията

във звеното и се нарича *коефициент на затихването*, а $\beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \omega_0$ е *ъгловата честота на колебанията*.

Изразът (9.51) може да се представи и във вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1)} &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s + \xi\omega_n + j\omega_0)(s + \xi\omega_n - j\omega_0)} \end{aligned}$$

Като се разложи изразът на прости дроби

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n^2}{s(s + \xi\omega_n + j\omega_0)(s + \xi\omega_n - j\omega_0)} &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_0^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_0^2}, \end{aligned}$$

и се направи обратното Лапласово преобразование

$$L^{-1}\left[\frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_0^2}\right] = e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_0 t),$$

$$L^{-1}\left[\frac{\omega_0}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_0^2}\right] = e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_0 t),$$

преходната функция има вида:

$$\begin{aligned} h(t) &= k \left[1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 t \right) \right] 1(t), \\ h(t) &= k \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T} t} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) \right] 1(t), \end{aligned} \quad (9.53)$$

или

$$\begin{aligned} h(t) &= k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left(\omega_0 t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] 1(t), \\ h(t) &= k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] 1(t). \end{aligned} \quad (9.53)$$

Честотата на колебанията се определя от

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \frac{2\pi}{\tau_0}. \quad (9.55)$$

Честотата ω_0 още се нарича демпферирана собствена честота. Преходния процес има характер на затихващ по експонента колебателен процес с относителен коефициент на затихване ξ и ъглова честота $\omega_0 = \beta$, стремящ се към установена стойност $h(\infty) = k$ при $t \rightarrow \infty$. Обвиващата крива се определя от

$$k e^{-\frac{\xi}{T} t}. \quad (9.56)$$

Съответно времето за преходния процес се оценява практически по

$$t_{np} = 3 \frac{T}{\xi} \quad (9.57)$$

Тегловната функция се определя като се диференцира израз (9.54):

$$w(t) = \frac{k}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \quad (9.58)$$

Честотно предавателната функция има вида:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T(j\omega) + 1}. \quad (9.59)$$

Амплитудо честотната характеристика се представя по следния начин:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T(j\omega) + 1} = \frac{k(1 - T^2\omega^2 - j2\xi T\omega)}{(1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega)(1 - T^2\omega^2 - j2\xi T\omega)} = \\ &= \frac{k(1 - T^2\omega^2) - jk2\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 - (j2\xi T\omega)^2} = \frac{k(1 - T^2\omega^2) - jk2\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \end{aligned}$$

или

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2) - jk2\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \quad (9.60)$$

На фигура фиг. 9.15, а е показана графично АФЧХ на колебателно звено.

Реалната и имагинерната част се получават съответно:

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \quad V(\omega) = -\frac{k2\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \quad (9.61)$$

Амплитудо честотната характеристика се получава от вида фиг. 9.15, б:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}} \quad (9.62)$$

Фазо честотната характеристика се получава от вида фиг. 9.15, в:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} & \text{при } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi - \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} & \text{при } \frac{1}{T} \leq \omega \leq \infty \end{cases} \quad (9.63)$$

Изследванията показват, че при честота:

$$\omega_{\max} = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \text{за } 0 < \xi < 0.707 \quad (9.64)$$

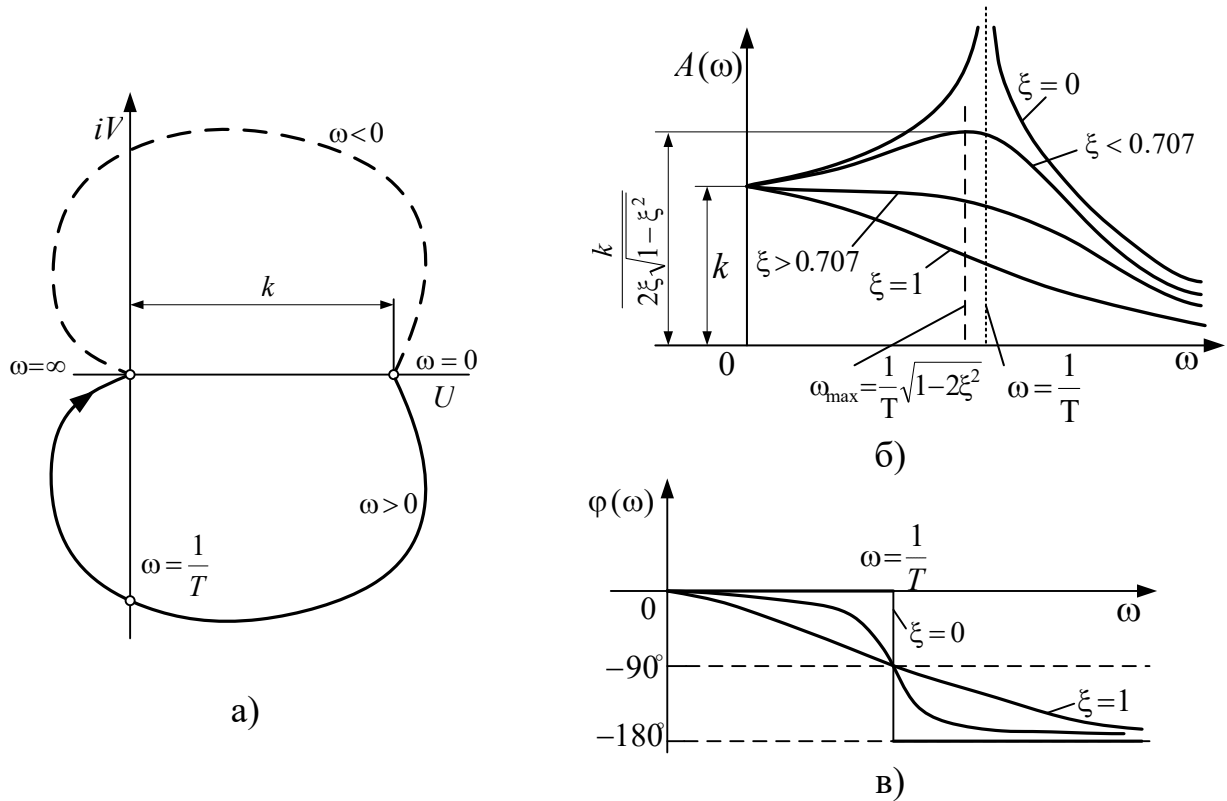
При $\xi < 0.707$ функцията $A(\omega)$ има максимум

$$A(\omega) = \frac{k}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (9.65)$$

Честотата $\omega_{\max}$ се нарича резонансна честота на звеното.

В случая, ако $1 > \xi > 0.707$ амплитудата $A(\omega)$ се намалява с увеличаване на ω , т. е. $A(\omega) \leq k$. При $0 < \xi < 0.707$ се появява увеличаване на $A(\omega)$ с увеличаване на ω , появява се резонансен пик. При $\xi \rightarrow 0$ $A(\omega) \rightarrow \infty$.

Когато коефициента $\xi \rightarrow 0$ то резонансната честота се приближава до собствената честота $\omega_{\max} \rightarrow \omega_n = \frac{1}{T}$.



Фиг. 9.15. Честотни характеристики на колебателно звено
а – АФЧХ; б – АЧХ, в - ФЧХ

Логаритмичната АЧХ на колебателното звено има вида:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \quad (9.66)$$

От това уравнение се вижда, че тази характеристика може да се апроксимира с помощта на две асимптоти, които имат следните уравнения

$$L(0) = 20 \lg k \quad 0 < \omega < \frac{1}{T} \quad (9.67)$$

$$L(\infty) = 20 \lg k - 40 \lg \omega T \quad \frac{1}{T} < \omega < \infty \quad (9.68)$$

Спрегнатата честота, т. е. честотата, в която се пресичат нискочестотната $L(0)$ и високочестотната $L(\infty)$ асимптотична характеристика е $\omega = \omega_n = \frac{1}{T}$. Наклонът на $L(\infty)$ е равен на -40 dB/dek .

При стойности на коефициента на демпфериране $0.5 < \xi < 1$ характеристиката е близка на начупената линия на асимптотичната характеристика. Ако $\xi < 0.5$ се получава резонансен пик.

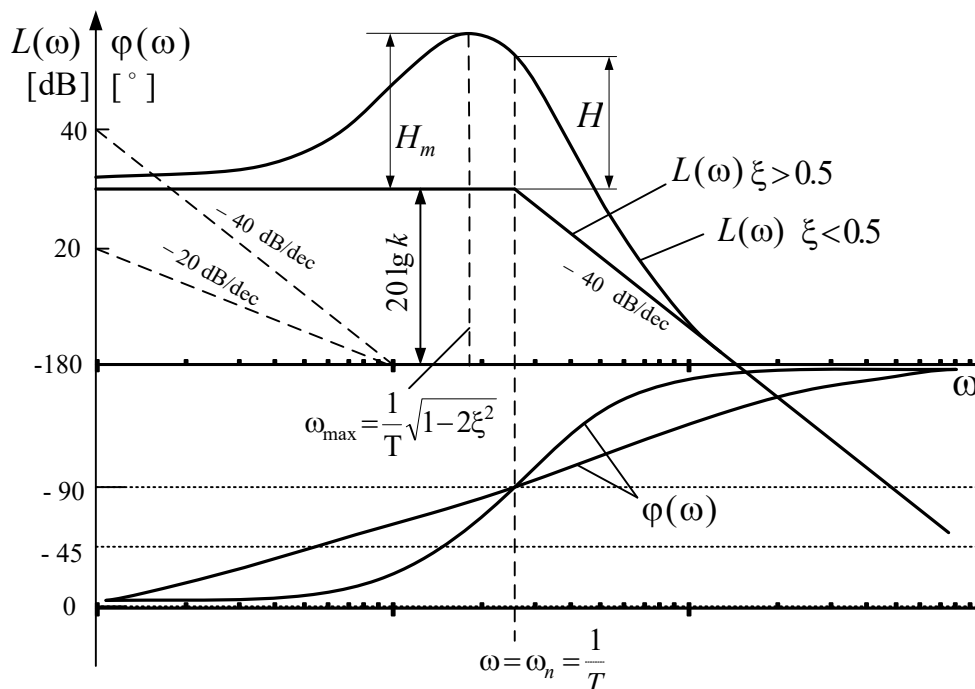
$$H_m = 20 \lg \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}, \quad (9.69)$$

при честота $\omega_{\max} = \frac{1}{T} \sqrt{1-2\xi^2}$.

При приблизителни пресмятания се приема $\xi \ll 1$ и $[A(\omega)]_{\max} \cong \frac{1}{2\xi}$. Тогава за резонансния пик на колебателното звено се получава

$$[H]_{\xi \ll 1} \cong 20 \lg \frac{1}{2\xi} \cong -20 \lg 2\xi \quad \text{при } \omega = \frac{1}{T} \quad (9.70)$$

Приблизителната ЛАЧХ на колебателно звено се намира, като се построят нискочестотната и високочестотната асимптота и от спрегнатата честота $\omega_0 = \frac{1}{T}$ се нанася $[H]_{\xi \ll 1}$ - фиг. 9.16. След това от върха се прекарва плавна крива, така че за честоти които са на разстояние 2-3 октави от спрегнатата честота, тя се слива с асимптотичните криви. Отклоненията /грешките/ при построяване на асимптотичната и реалната ЛАЧХ могат да се намерят в специализираните справочници, като максималната стойност не превишава 6 dB.



Фиг. 9.16 ЛАЧХ на колебателно звено.

9.6. Консервативно звено

Диференциалното уравнение на консервативното звено има вида:

$$T^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 = k x_1 \quad (9.71)$$

T - времекопстанта.

Предавателната функция на това звено е:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1} \quad (9.72)$$

Всички характеристики на това звено могат да се получат от тези на колебателното звено, като се положи $\xi = 0$.

Съответно преходната характеристика от (9.54) се получава

$$h(t) = k \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right) 1(t), \quad (9.73)$$

а тегловната съответно от (9.58)

$$w(t) = \frac{k}{T} \sin \frac{t}{T}. \quad (9.74)$$

Честотно предавателната функция има вида:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 1} = \frac{k}{1 - T^2\omega^2} \quad (9.75)$$

Амплитудочестотната функция има вида:

$$A(\omega) = \frac{k}{|1 - T^2\omega^2|} \quad (9.76)$$

и при $\omega = \frac{1}{T}$ отива към безкрайност.

Фазочестотната характеристика се определя от:

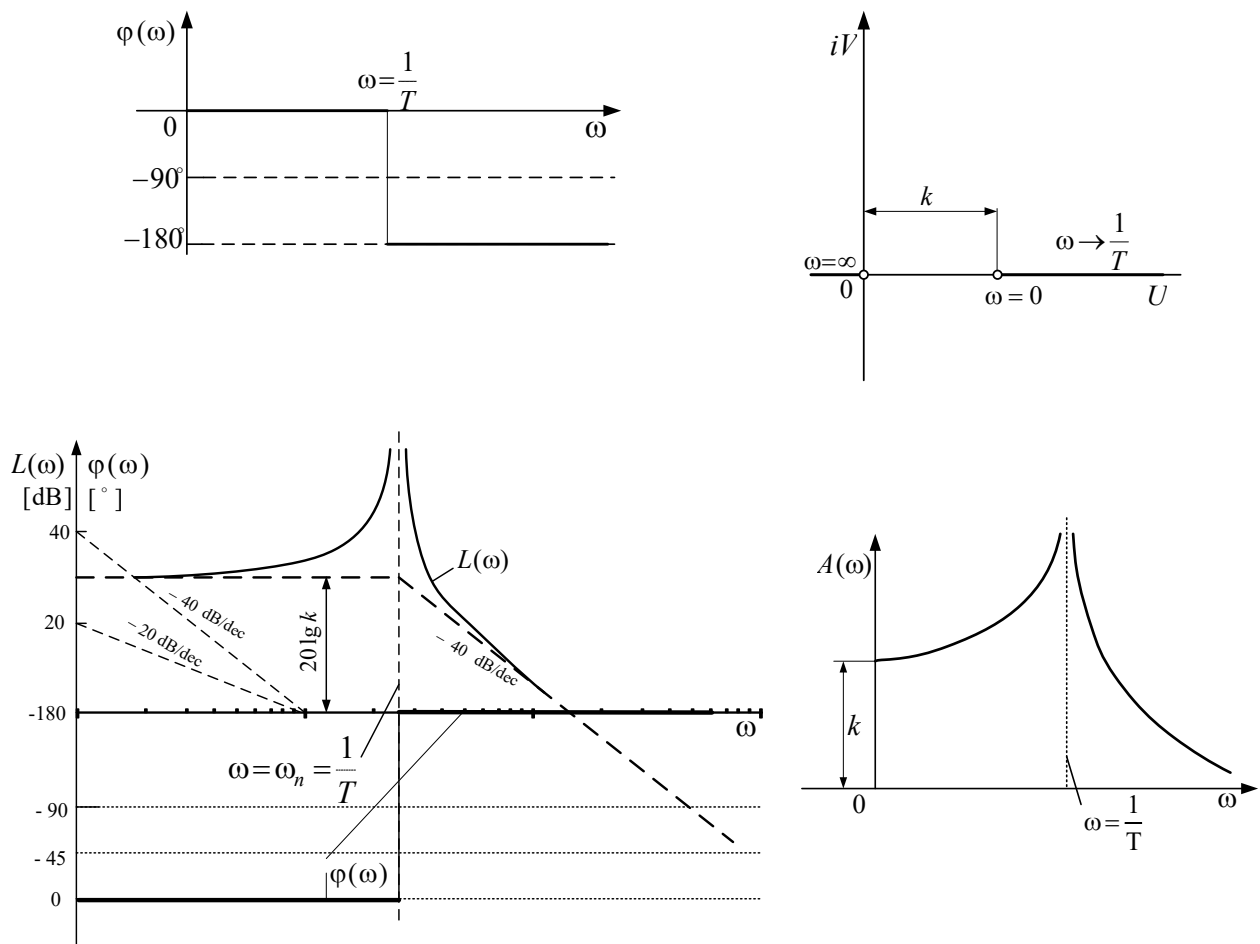
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi & \text{при } \frac{1}{T} \leq \omega \leq \infty \end{cases} \quad (9.77)$$

като при $\omega = \frac{1}{T}$ има скок на -180° .

Логаритмичната амплитудо честотна характеристика се определя от:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{|1 - T^2\omega^2|} \quad (9.78)$$

Асимптотичната ЛАЧХ е аналогична на тази за консервативно звено, а реалната при $\omega = \omega_n = \frac{1}{T}$ има безкрайно голяма стойност.



Фиг. 9.15. Честотни характеристики на колебателно звено
а – АФЧХ; б – АЧХ, в - ФЧХ

9.7. Интегриращи звена

Идеално интегриращо звено. Описва се с диференциалното уравнение:

$$\frac{dx_2}{dt} = k x_1 \quad \text{или} \quad x_2 = k \int x_1 dt \quad (9.79)$$

Скоростта на изменение на изходната величина при това звено е пропорционална на входната величина. В идеалния случай изходната величина може да нараства или намалява неограничено при постоянна стойност на входната величина. За разлика от пропорционалните звена в интегриращото звено няма определено съотношение установените стойности на входната и изходна величина, а само определено съотношение между входната величина и скоростта на изменение на изходната величина.

Предавателната функция на това звено е:

$$W(s) = \frac{k}{s} \quad (9.80)$$

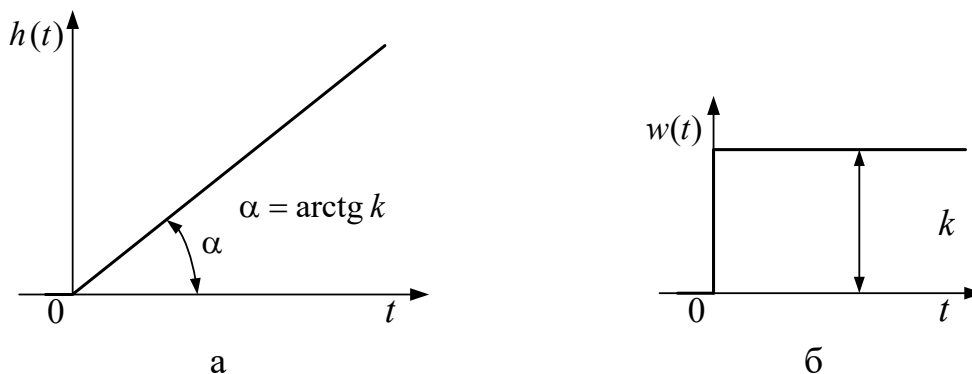
Преходната функция се определя от:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = k L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = k t 1(t), \quad (9.81)$$

а тегловната е

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k \cdot 1(t), \quad (9.82)$$

Временните характеристики на идеално интегриращо звено са показани на фиг. 9.16.



Фиг. 9.16. Временните характеристики на идеално интегриращо звено

а – преходна характеристика; б- тегловна характеристика

Честотно предавателната функция на идеалното интегриращо звено има вида:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega} \quad (9.83)$$

$$U(\omega) = 0; \quad V(j\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

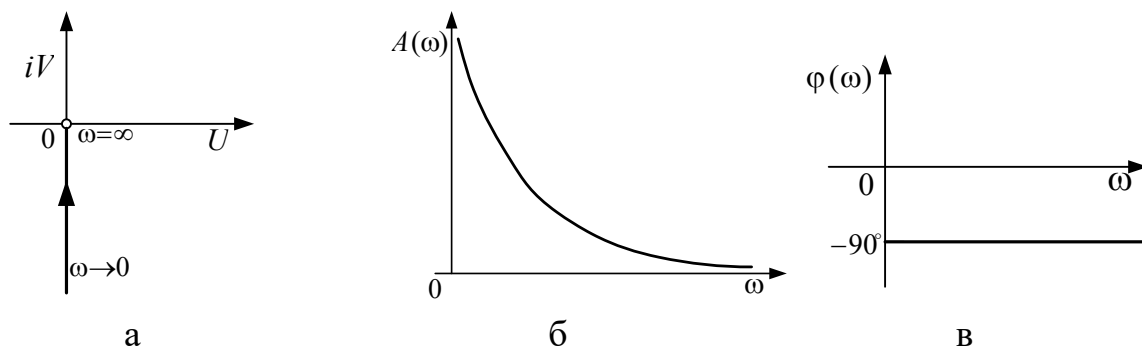
Амплитудно честотната характеристика има вида:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega} \quad (9.84)$$

АЧХ показва, че звеното пропуска сигнал толкова по-силно, колкото по-малка е неговата честота. При $\omega = 0$ амплитудата се стреми към безкрайност $A(\omega) \rightarrow \infty$ и обратно при $\omega \rightarrow \infty$ $A(\omega) \rightarrow 0$.

Фазочестотната характеристика е:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V}{U} = \arctg(-\infty) = -90^\circ \quad (9.85)$$



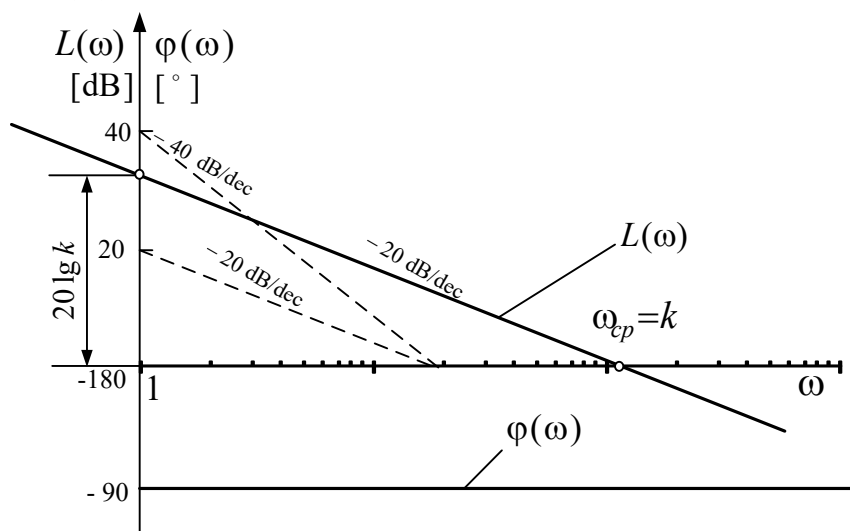
Фиг. 9.17. Честотни характеристики на идеално интегриращо звено

а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ

Логаритмично честотната характеристика се определя от:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega \quad (9.86)$$

Графично ЛАЧХ представлява права, преминаваща през точка $20 \lg k$ при $\omega = 1$ с наклон -20 dB/dec . ЛАЧХ пресича абсисната ос при 0 dB при срязваща честота $\omega_{cp} = k$. Фазочестотната характеристика представлява права паралелна на абсисната ос $\varphi(\omega) = -90^\circ$.



Фиг. 9.18. ЛАЧХ на идеално интегриращо звено

9.8. Реално интегриращо звено /инерционно интегриращо звено /

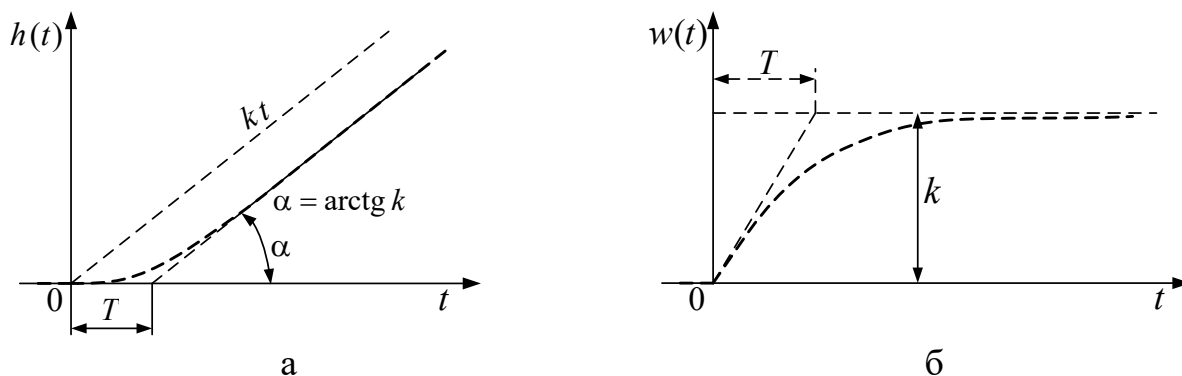
Описва се с диференциалното уравнение:

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k x_1 \quad (9.87)$$

Предавателната функция на това звено е:

$$W(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)} = \frac{k}{s} \frac{1}{Ts + 1} \quad (9.88)$$

Инерционното интегриращо звено може да се представи като съвкупност от две последователно свързани звена – идеално интегриращо и апериодично звено от 1 ред.



Фиг. 9.19. Временните характеристики на инерционно интегриращо звено
а – преходна характеристика; б- тегловна характеристика

Преходната функция се определя от:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = k L^{-1} \left[\frac{1}{s^2(Ts + 1)} \right] = k \left[t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] 1(t), \quad (9.89)$$

а тегловната е

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t), \quad (9.90)$$

Следователно за сметка на времеконстантата T вместо идеалното интегриране, тук се получава интегриране със закъснение.

Временните характеристики на идеално интегриращо звено са показани на фиг. 9.19.

Честотно предавателната функция на инерционното интегриращо звено има вида:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + jT\omega)}. \quad (9.91)$$

Реалната и имагинерната част на АФЧХ са:

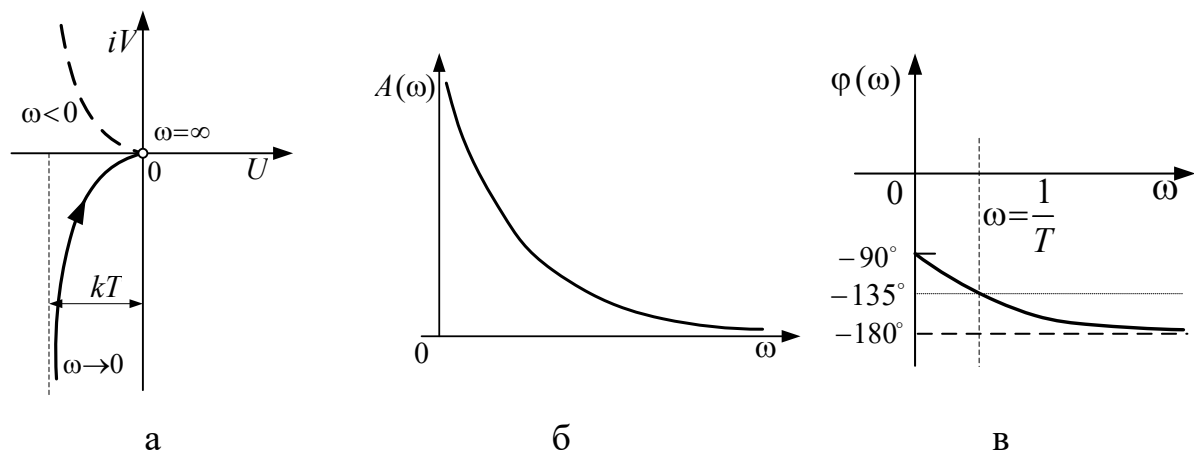
$$U(\omega) = -\frac{kT}{T^2\omega^2 + 1}; \quad V(j\omega) = -\frac{T}{\omega(T^2\omega^2 + 1)}.$$

Вижда се, че при $\omega \rightarrow 0$ реалната част $U \rightarrow -kT$, имагинерната част $V \rightarrow 0$.

Амплитудно честотната характеристика има вида:

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}. \quad (9.92)$$

АЧХ на реалното интегриращо звено може да се определи като се умножат АЧХ на идеално интегриращо звено и апериодично звено от 1 ред.



Фиг. 9.20. Честотни характеристики на инерционно интегриращо звено

а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ

Фазочестотната характеристика е:

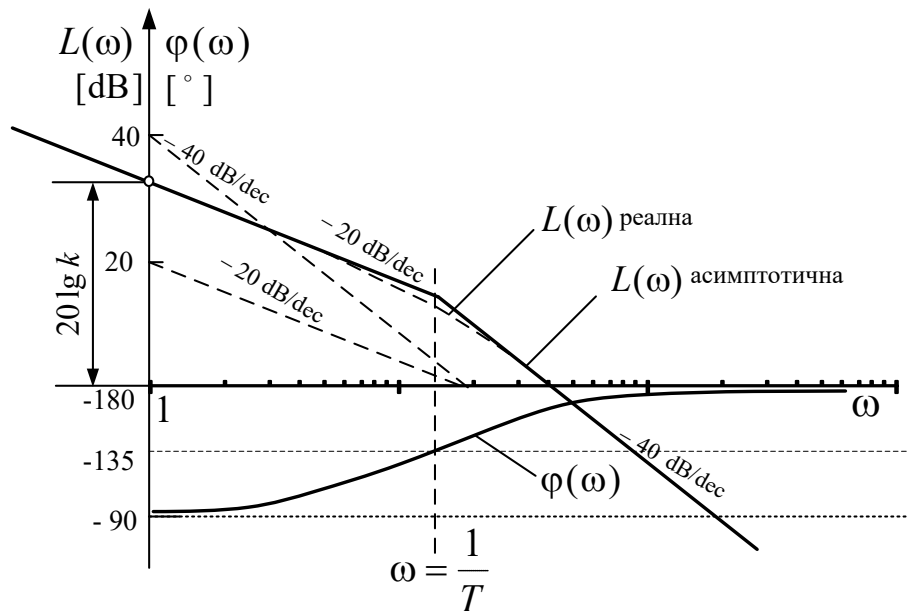
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -90^\circ - \arctg(T\omega) \quad (9.93)$$

Може да се види, че инерционното интегриращо звено при всички честоти внася отрицателна фазова разлика.

Логаритмично честотната характеристика се определя от:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} \quad (9.94)$$

Графично асимптотичната ЛАЧХ представлява две прави с наклон -20 dB/dec при $\omega < \frac{1}{T}$ и -40 dB/dec при $\omega > \frac{1}{T}$. Отклонението на реалната ЛАЧХ от асимптотичната е максимално 3 dB.



Фиг. 9.21. ЛАЧХ на инерционно интегриращо звено

9.10. Изодромно звено

Описва се с диференциалното уравнение:

$$\frac{dx_2}{dt} = k x_1 + k_1 \frac{dx_1}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dx_2}{dt} = k \left(\tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 \right) \quad (9.95)$$

Предавателната функция на това звено е:

$$W(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{s} = k_1 + \frac{k}{s} \quad (9.96)$$

$$k_1 = k \tau.$$

Изодромното звено може да се представи като съвкупност от две паралелно свързани звена – идеално интегриращо с коефициент на предаване k и без инерционно с коефициент k_1 .

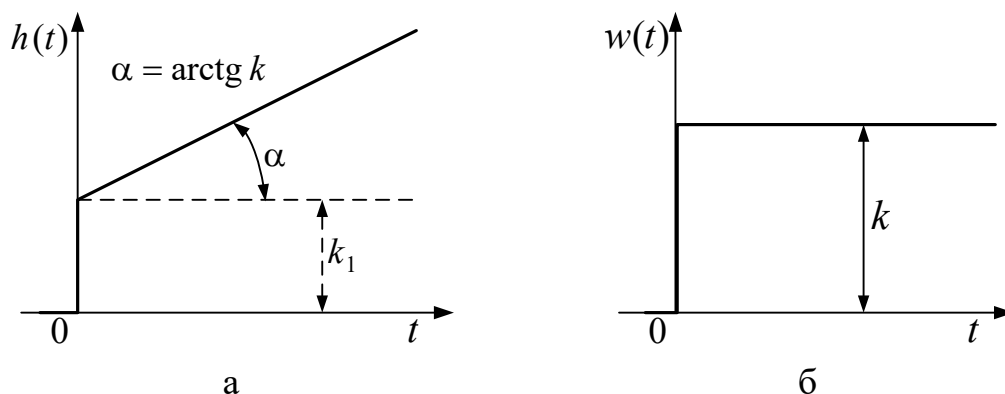
Преходната функция се определя от:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{k_1}{s} + \frac{k}{s^2}\right] = (kt + k_1)1(t), \quad (9.97)$$

а тегловната е

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k1(t) + k_1\delta(t). \quad (9.98)$$

Временните характеристики на изодромното звено са представени на фиг. 9.22.



Фиг. 9.22. Временните характеристики на изодромно звено
а – преходна характеристика; б- тегловна характеристика

Честотно предавателната функция на инерционото интегриращо звено има вида:

$$W(j\omega) = \frac{k(1 + j\tau\omega)}{j\omega} \quad (9.99)$$

Реалната и имагинерната чест на АФЧХ са:

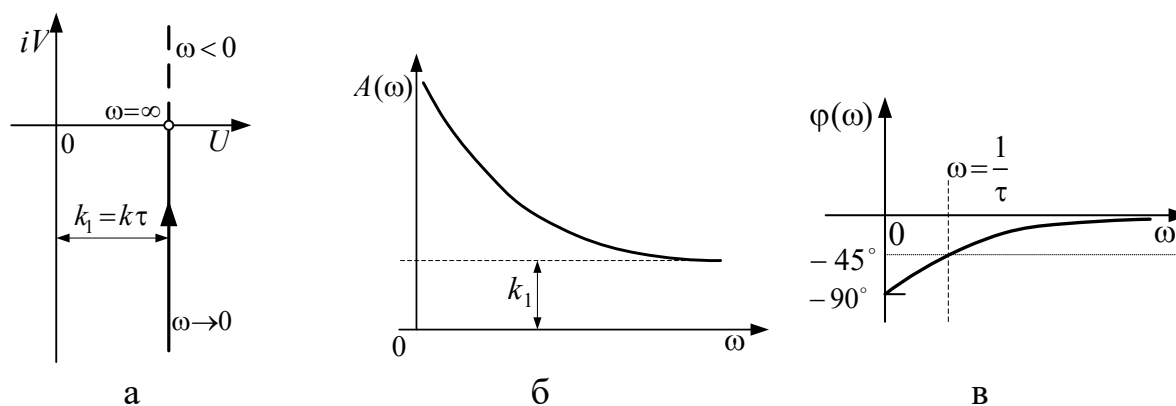
$$U(\omega) = \tau k; \quad V(j\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

Амплитудо честотната характеристика има вида:

$$A(\omega) = \frac{k\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}{\omega} \quad (9.100)$$

Фазочестотната характеристика е:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -90^\circ + \arctg(\tau\omega) \quad (9.101)$$



Фиг. 9.23. Честотни характеристики на издромно звено
а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ

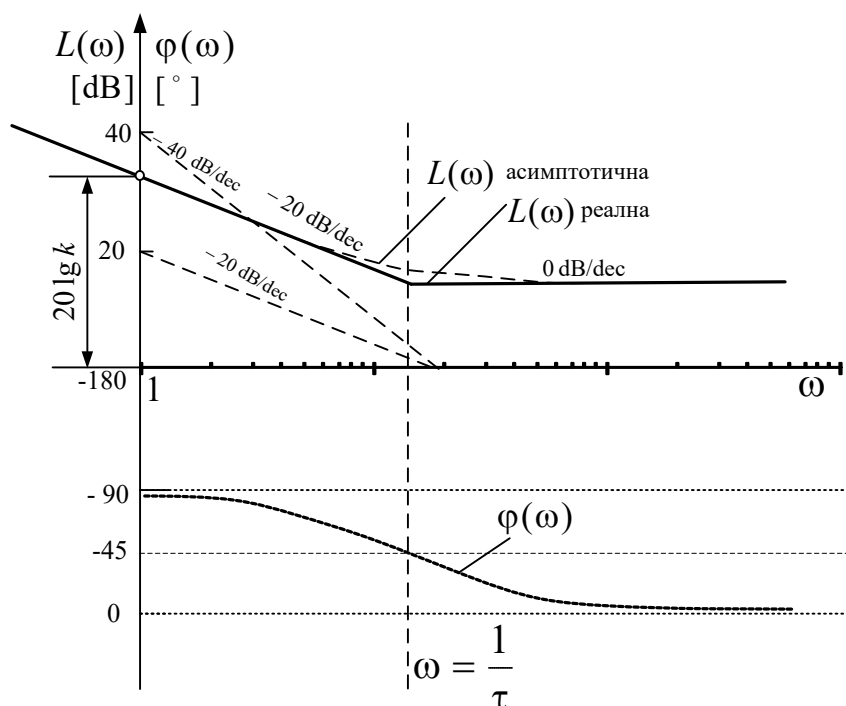
Логаритмично честотната характеристика се определя от:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1} \quad (9.102)$$

Графично асимптотичната ЛАЧХ представлява две прави едната с наклон -20 dB/dec при $\omega < \frac{1}{\tau}$ и другата паралелна на абсисната ос $/0 \text{ dB/dec}/$ при $\omega > \frac{1}{\tau}$.

Отклонението на реалната ЛАЧХ от асимптотичната е максимално 3 dB .

При разглеждането на ЛАЧХ се вижда, че в областите на ниските честоти /по-малки от спрягащата/ звеното се държи като идеално интегриращо звено. В областта на високите честоти /по-големи от спрягащата/ звеното се държи като безинерционно. Свойството на издромното звено да въвежда интегриращо действие при ниските честоти се използва за подобряване на качествените показатели на системите за автоматично регулиране и управление.



Фиг. 9.24. ЛАЧХ на издромно звено

9.10. Диференциращи звена

Идеално диференциращо звено

Това звено се описва със следното уравнение

$$x_2 = k \frac{dx_1}{dt} \quad (9.103)$$

Предавателната функция на това звено е:

$$W(s) = k s \quad (9.104)$$

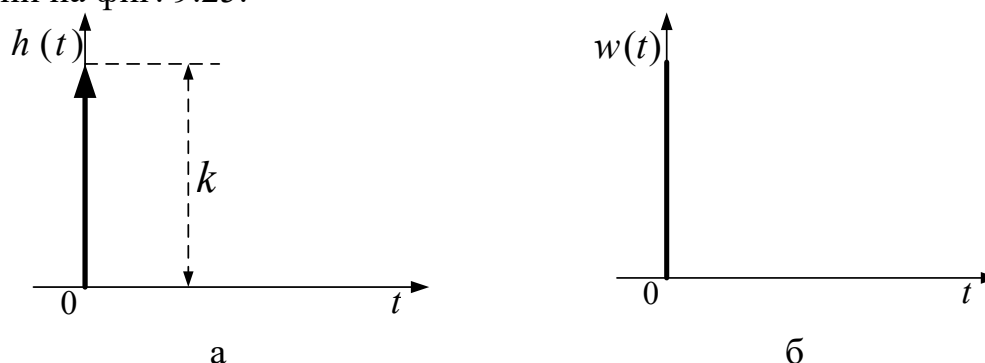
Преходната функция се определя от:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = L^{-1} [k] = k \delta(t), \quad (9.105)$$

а тегловната е

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k \frac{d\delta(t)}{dt}, \quad (9.106)$$

Временните характеристики на идеално диференциращо звено са представени на фиг. 9.25.



Фиг. 9.25. Временните характеристики на идеално диференциращо звено
а – преходна характеристика; б- тегловна характеристика

Честотно предавателната функция на идеално диференциращо звено има вида:

$$W(j\omega) = j k \omega \quad (9.107)$$

Реалната и имагинерната чест на АФЧХ са:

$$U(\omega) = 0; \quad V(j\omega) = k \omega$$

Амплитудно честотната характеристика има вида:

$$A(\omega) = k \omega \quad (9.108)$$

Честотните характеристики на идеалното диференциращо звено са показани на фиг. 9.26.

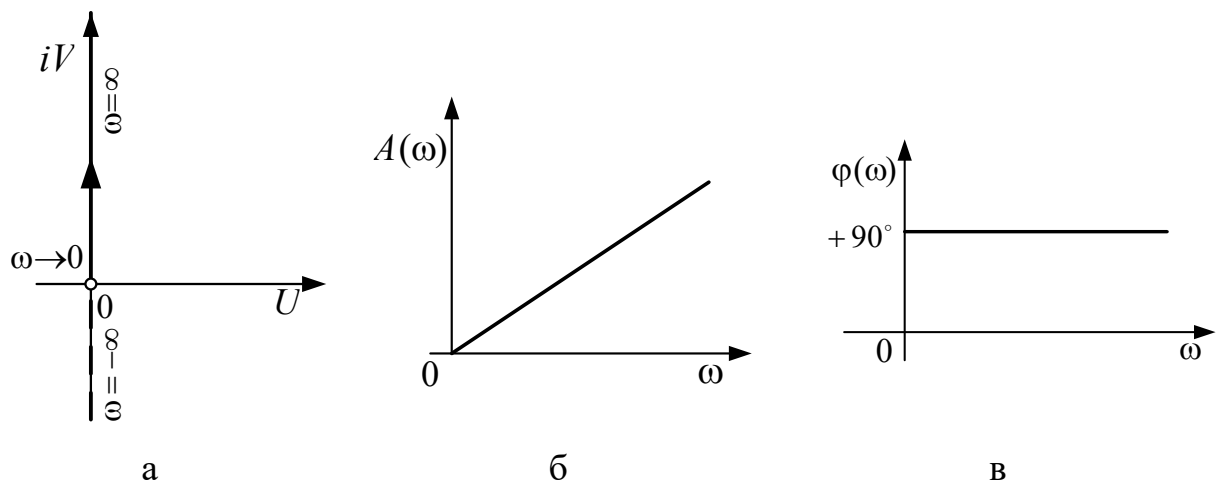
Фазочестотната характеристика е:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = + 90^\circ \quad (9.109)$$

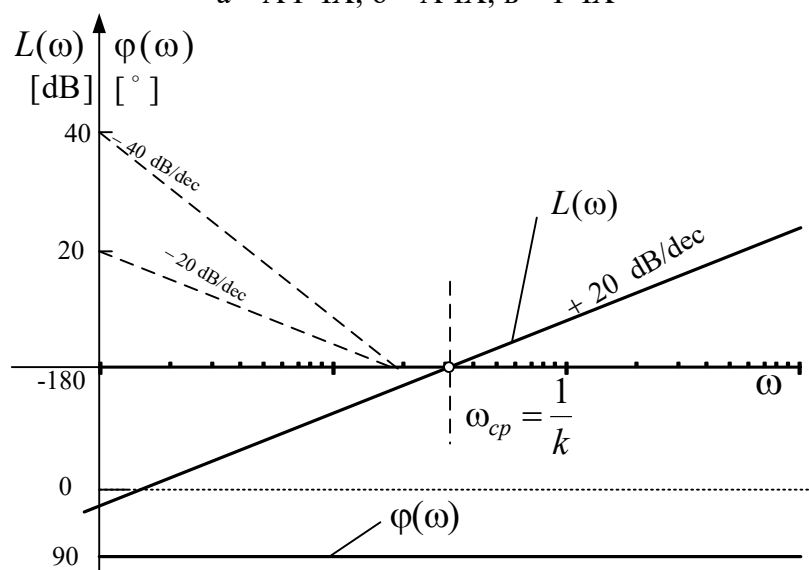
$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k \omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega \quad (9.110)$$

За разлика от интегриращото звено тук има положителен наклон $+20 \text{ dB/dec}$ и положително дефазиране $+90^\circ$. Наличието на положително дефазиране означава изпреварване на сигнала на изхода на звеното по отношение на входа. Физически, това е свързано с това, че звеното реагира на скоростта на изменение на входната величина, на тенденцията за изменение в бъдещето.

Логаритмично честотните характеристики на идеалното диферинциращо звено са показани на фиг. 9.27.



Фиг. 9.26. Честотни характеристики на идеално диферинциращо звено
а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ



Фиг. 9.27. ЛАЧХ на идеално диферинциращо звено

Реално диференциращо звено /диференциращо звено със закъснение.

Това звено се описва със следното уравнение

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k \frac{dx_1}{dt} \quad (9.111)$$

Предавателната функция на това звено е:

$$W(s) = \frac{k s}{Ts + 1} \quad (9.112)$$

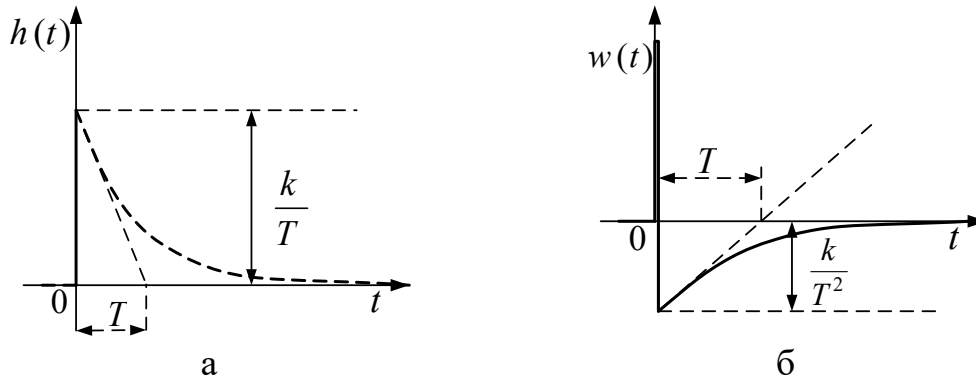
Преходната функция се определя от:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] = k L^{-1} \left[\frac{1}{Ts + 1} \right] = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t), \quad (9.113)$$

а тегловната е

$$w(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} 1(t), \quad (9.114)$$

Временните характеристики на реално диференциращо звено са представени на фиг. 9.28.



Фиг. 9.28. Временните характеристики на реално диференциращо звено

а – преходна характеристика; б- тегловна характеристика

Честотно предавателната функция на реалното диференциращо звено има вида:

$$W(j\omega) = \frac{j k \omega}{(1 + jT\omega)} \quad (9.115)$$

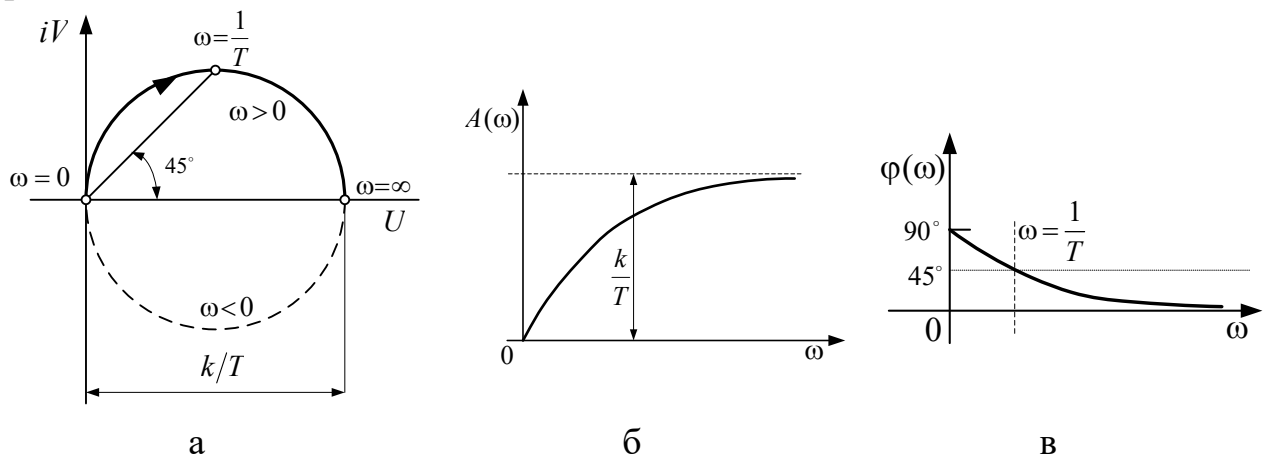
Реалната и имагинерната чест на АФЧХ са:

$$U(\omega) = \frac{T k \omega^2}{1 + T^2 \omega^2}; \quad V(j\omega) = \frac{k \omega}{1 + T^2 \omega^2}$$

Амплитудно честотната характеристика има вида:

$$A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \quad (9.116)$$

Честотните характеристики на реалното диференциращо звено са показани на фиг. 9.29.



Фиг. 9.29. Честотни характеристики на реално диференциращо звено

а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ

АЧХ прилича на идеално диференциращо звено. Характеристиките съвпадат в областите на ниските честоти. В областта на високите честоти реалното звено пропуска по-лошо сигнала от идеалното. Коефициента на предаване се стреми към $\frac{k}{T}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Реалното диференциращо звено добре пропуска високите честоти и по-лошо ниските. Вследствие на това последователното включване на диференциращи звена със закъснение обикновено води до рязко нарастване на високочестотните смущения.

Фазочестотната характеристика е:

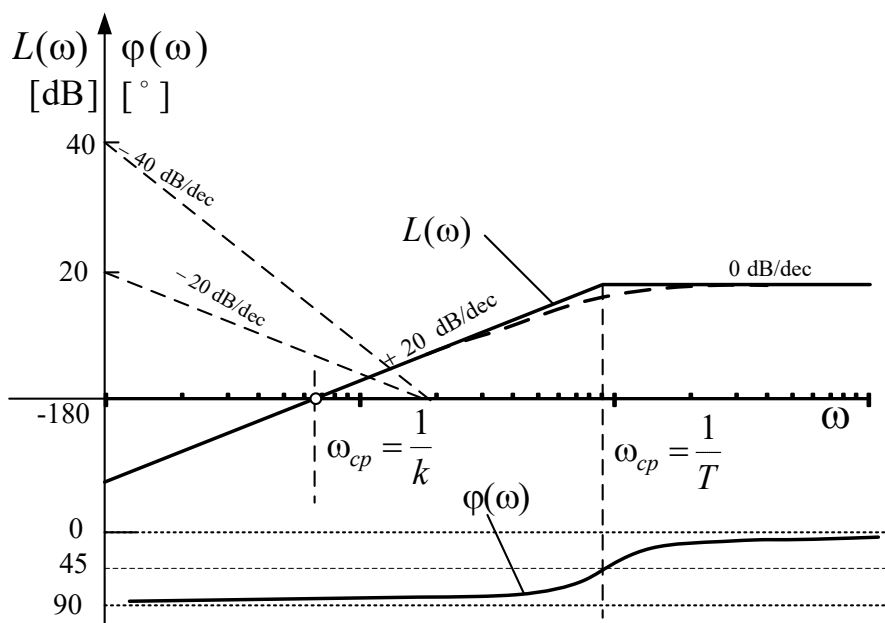
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = +90^\circ - \arctg(T\omega) \quad (9.117)$$

Дефазирането при реалното диференциращо звено е най-голямо при ниските честоти, а на високите честоти постепенно намалява до нула при $\omega \rightarrow \infty$.

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 20 \lg k + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2} \quad (9.118)$$

Асимптотичната ЛАЧХ може да се представи с две прави, едната от тях има положителен наклон $+20 \text{ dB/dec}$ при $\omega < \frac{1}{T}$, а втората е паралелна на оста на честотите при $\omega > \frac{1}{T}$.

Логаритмично честотните характеристики на идеалното диференциращо звено са показани на фиг. 9.30.



Фиг. 9.30. ЛАЧХ на реално диференциращо звено

9.11. Звено с чисто закъснение

В САР често се срещат звена, които формират сигнала на изхода с известно закъснение по времето спрямо подадения сигнал на входа на звеното.

Характерно за звената със закъснение, е че те повтарят изцяло входната величина, но след изтичане на определен интервал от време τ_3 . Това време се нарича *време на закъснение*.

Типичен пример за звено с чисто, транспортно закъснение е лентовия конвейер за пренасяне на насипни материали – фиг. 9.31, а. Входния сигнал е отварянето на бункера x_1 , а изходния сигнал x_2 нивото на материала в контейнера на край на лентата. Времето за закъснение τ_3 се определя от изрази

$$\tau_3 = \frac{l}{V}, \quad (9.118)$$

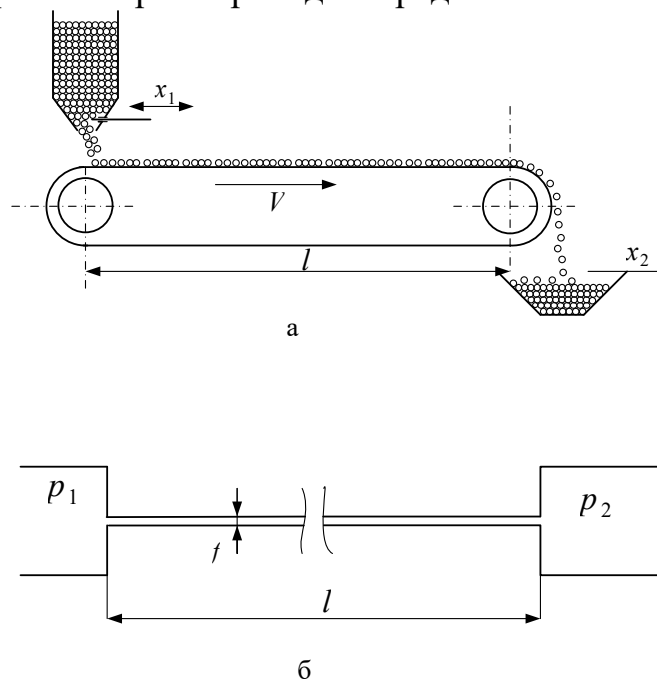
където l е дължината на лентата, а V скоростта на движение на лентата.

Подобно на разглеждания пример може да се определи времето τ_3 при предаване на пневматични сигнали в устройствата на пневмоавтоматиката, когато елементите са намират на разстояние l един спрямо друг – фиг. 9.31, б.

За времето τ_3 се приема следния израз

$$\tau_3 = k \frac{l}{a}, \quad (9.119)$$

където l е дължината на пневмопровода, a скоростта на звука, k коефициент зависещ от параметрите на тръбопровода и средата.



Фиг. 9.31 Примери за закъснителни звена
а – транспортна лента; б – пневматична линия

Уравнението на закъснителното звено се написва във вида

$$\begin{cases} x_2(t) = 0 & \text{при } 0 < t \leq \tau_3 \\ x_2(t) = x_1(t - \tau_3) & \text{при } t > \tau_3 \end{cases} \quad (9.120)$$

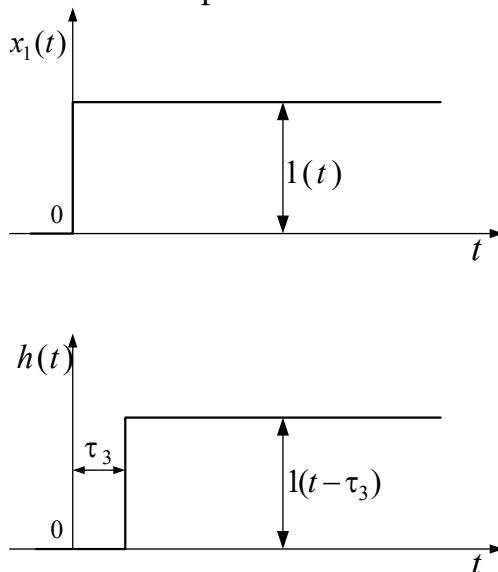
Предавателната функция на закъснителното звено има вида:

$$W(s) = e^{-s\tau_3}. \quad (9.121)$$

При подаване на единично скокообразно входно въздействие преходната функция се получава от вида:

$$h(t) = 1(t - \tau_3). \quad (9.122)$$

Тази характеристика е показана на фиг. 9.32.



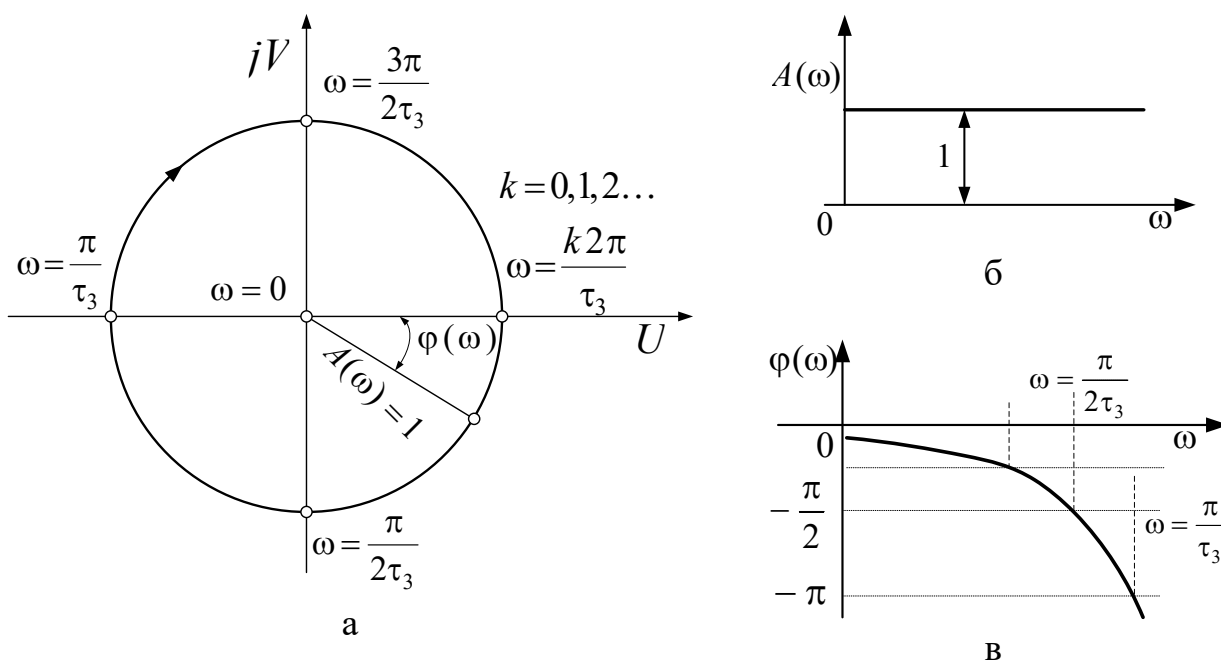
Фиг. 9.32 Преходна характеристика на закъснително звено

При хармонично входно въздействие

$$x_1 = Ae^{j\omega t}. \quad (9.123)$$

изходната величина се определя от израза

$$x_2 = Ae^{j\omega(t-\tau_3)} = Ae^{j\omega t} e^{-j\omega\tau_3} = x_1 e^{-j\omega\tau_3}. \quad (9.124)$$



Фиг. 9.33 Честотни характеристики на закъснително звено

а – АФЧХ; б – АЧХ; в – ФЧХ

Амплитудно-фазовата характеристика

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau_3} = \cos(\omega\tau_3) - j\sin(\omega\tau_3) \quad (9.125)$$

и представлява окръжност с радиус единица, с център началото на координатната система – фиг. 9.33.

Съответно АЧХ и ФЧХ имат вида:

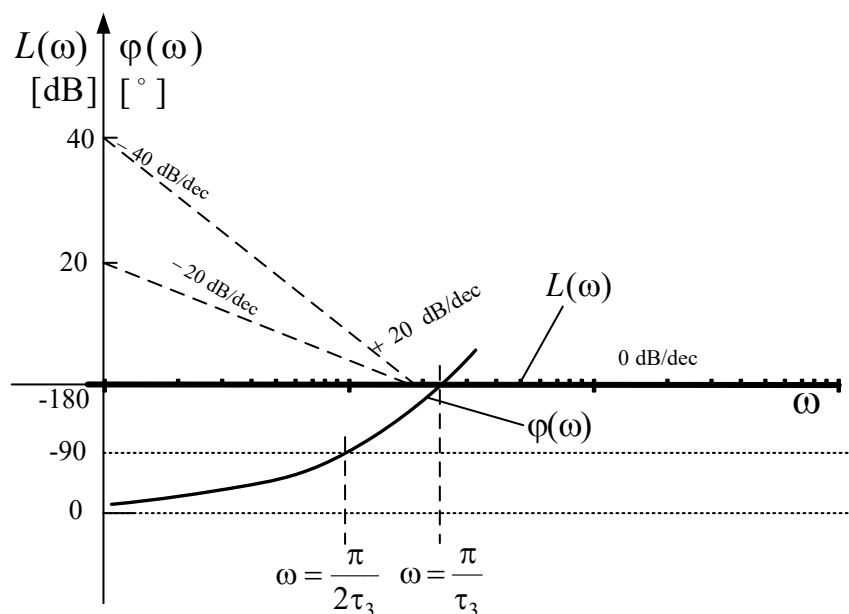
$$A(\omega) = 1 \quad (9.126)$$

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau_3 \quad (9.127)$$

Логаритмичната амплитудно честотна характеристика се определя от:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg 1 = 0 \quad (9.128)$$

ЛАЧХ представлява права линия, която се слива с абсисната ос – фиг. 9.34, а ЛФЧХ е крива с неограничено нарастване на дефазиранието при изменение на честотата в интервала $0 < \omega < \infty$



Фиг. 9.34. ЛАЧХ на закъснително звено

9.12. Построяване на логаритмични честотни характеристики (ЛАЧХ) на последователно свързани звена

Познаването на логаритмичните честотни характеристики на типовите звена позволява доста бързо да се построят логаритмичните характеристики на система, предавателната функция можа да се представи като определено съчетание на предавателни функции на елементарни звена.

В логаритмичните координати действията умножение и деление се свеждат до графично събиране и изваждане на характеристиките. Това позволява всяка сложна честотна характеристика да бъде съставена от съставляващите я елементарни честотни характеристики. Друго важно предимство е, че не е необходимо ЛЧХ да бъдат строени тока по точка. Със задоволителна

техническа точност те се строят по участъци с помощта на асимптотите си. Болшинството от сложни предавателни функции могат да се представят в следния вид:

$$W(j\omega) = K \frac{\prod_{k=1}^q (\tau_k s + 1) \prod_{k=1}^l (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{\mu} (T_i s + 1) \prod_{i=1}^r (T_i^2 s^2 + 2\zeta_i T_i s + 1)} \quad (9.129)$$

Като се замени $s = j\omega$, и после се логаритмува ще се получи израз за логиртмично амплитудо честотната характеристика на системата

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg K - v 20 \lg \omega + 20 \sum_{k=1}^q \lg \sqrt{\tau_k^2 \omega^2 + 1} - 20 \sum_{i=1}^{\mu} \lg \sqrt{T_i^2 \omega^2 + 1} + \\ + 20 \sum_{k=1}^l \lg \sqrt{(1 - \tau_k^2 \omega^2)^2 + 4\zeta_k^2 \tau_k^2 \omega^2} - 20 \sum_{i=1}^r \lg \sqrt{(1 - T_i^2 \omega^2)^2 + 4\zeta_i^2 T_i^2 \omega^2}$$

Фазочестотната характеристика на системата ще е:

$$\varphi(\omega) = -v \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^q \arctg(\omega \tau_k) - \sum_{i=1}^{\mu} \arctg(\omega T_i) + \sum_{k=1}^l \arctg \frac{2\zeta_k \tau_k \omega}{1 - \tau_k^2 \omega^2} - \sum_{i=1}^r \arctg \frac{2\zeta_i T_i \omega}{1 - T_i^2 \omega^2}$$

Формулите показват, че резултантните характеристики се определят като сума от логаритмичните и фазовите характеристики на типовите звена.

ГЛАВА 10

СТРУКТУРНИ СХЕМИ И УРАВНЕНИЯ НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ

10.1. Съставяне на диференциалните уравнения на линейни системи

За теоретичното изследване на системите за регулиране и управление е необходимо преди всичко да се съставят уравненията, описващи тяхната работа. Това са обикновено диференциални уравнения, като най-често са описанието на линейни автоматични системи се използват обикновени линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти.

Всички реални елементи на автоматичните системи са в по-голяма или по-малка степен нелинейни. Описанието на реалните елементи и системи с линейни диференциални уравнения е възможно само като се линеаризират нелинейните уравнения. Разбира се в този случай описанието е приблизително, но за много практически случаи, точността, получена от линеаризираните уравнения е напълно достатъчна. Тъй като линейните уравнения се появяват като резултат от линеаризация, то уравненията на линейните елементи и системи винаги представляват уравнения, съставено в отклонения от някой изходен режим на работа на елемента или системата.

За да се получат диференциалните уравнения, САР обикновено се разбива на звена и се съставят диференциалните уравнения за всяко звено по отделно. Диференциалните уравнения на звената на САР, като се разглеждат съвместно, в съвкупност образуват система диференциални уравнения, описващи работата на САР.

Разбиването на САР на звена може да стане по различен начин. Желателно е да се разбива САР на типови звена с насочено действие, уравненията на които са известни. Често в качеството на динамични звена се избират елементи на САР. След това, като се изключат промеждутъчните величини, системата от диференциални уравнения се свежда до едно уравнение от висок ред, съдържащо изходната величина и всички външни въздействия /задаващи и смущаващи/. Обикновено диференциалното уравнение на САР се съставя за регулируемата величина $y(t)$ или за грешката $x(t)$.

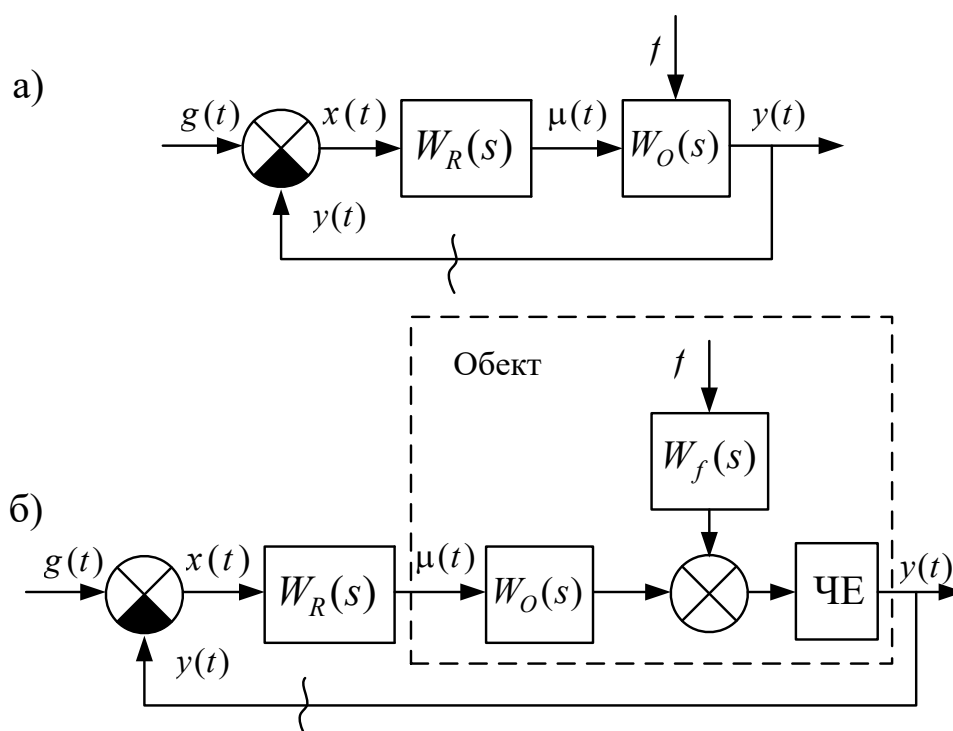
10.2. Предавателни функции на линейни системи

В повечето случаи значително по бързо, просто и нагледно уравненията на САР се съставят по така наречената структурна схема на САР с помощта на апарата на предавателните функции.

Структурната схема на САР показва, от какви звена се състои САР и как те са свързани помежду си. На структурните схеми звената се изобразяват с правоъгълници, в които е записана предавателната им функция. При така направената структурна схема САР представлява графично изображение на диференциалните уравнения, описващи работата на системата. Графичното изображение на уравненията на звената е да предпочитане пред обичайния

математичен запис, защото позволява лесно и по еднообразни правила да се прави преобразуването в едно уравнение с помощта на правилата за свързване на звената.

В общия случай диференциалните уравнения на звената за всяка САР могат да се разбият на две групи, едната от тях описва работата на регулатора, а другата – обекта на регулиране. Структурната схема на произволна САР може да се приведе във вида показан на фиг. 10.1, а, където $W_R(s)$ и $W_O(s)$ – предавателни функции на регулатора и обекта на регулиране. На тази фигура е показано само едно смущаващо въздействие f , приложено към обекта. Предавателната функция по това смущение е означена с $W_f(s)$ – фиг. 10.1, б. В общия случай смущаващите въздействия могат да са произволен брой.



Фиг. 10.1 Структурни схеми на САР

а – обща; б – разгъната

В приетата на фиг. 10.1 структурна схема чувствителния елемент условно е отнесен към обекта за регулиране и изходната величина на САР се счита изходната величина от чувствителния елемент.

В общия случай всяка от предавателните функции $W_R(s)$, $W_O(s)$ и $W_f(s)$ представлява дробна рационална функция на комплексната променлива s :

$$W_R(s) = \frac{b_R(s)}{c_R(s)}. \quad (10.1)$$

$$W_O(s) = \frac{b_O(s)}{c_O(s)}. \quad (10.2)$$

$$W_f(s) = \frac{b_f(s)}{c_O(s)}. \quad (10.3)$$

Предавателна функция на отворената система $W(s)$. Представява отношението на Лапласовия образ на регулируемата величина към Лапласовия образ на сигнала на грешката при нулеви начални условия на функциите $y(t)$ и $x(t)$ и техните производни и нулеви смущения.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (10.4)$$

където $Y(s) = L^{-1}\{y(t)\}$, $X(s) = L^{-1}\{x(t)\}$.

Наименованието на тази предавателна функция става понятно, като се отчете че при разкъсване на главната обратна връзка /мястото е отбелязано с вълнообразна линия на фиг. 10.1/ входен сигнал на САР е грешката $x(t)$.

Предавателната функция $W(s)$ лесно се определя от структурната схема на САР /всички смущаващи въздействие се приемат за равни на нула/. На фиг. 10.1 отворената САР се състои от две последователно включени звена – обекта и регулатора. За това:

$$W(s) = W_R(s)W_O(s) = \frac{b_R(s)b_O(s)}{c_R(s)c_O(s)}. \quad (10.5)$$

В общия случай предавателната функция на отворената система представлява рационална дроб:

$$W(s) = \frac{b(s)}{c(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + b_2s^{m-2} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{c_0s^n + c_1s^{n-1} + c_2s^{n-2} + \dots + c_{n-1}s + c_n}. \quad (10.6)$$

където $b(s) = b_R(s)b_O(s)$; $c(s) = c_R(s)c_O(s)$ са полиноми с реални коефициенти, зависещи от параметрите на звената на САР. В реалните системи винаги $m < n$ и $b_m \neq 0$. Многочлена $c(s)$ се нарича *характеристичен полином на отворената система*, а уравнението:

$$c(s) = 0. \quad (10.7)$$

представлява *характеристичното уравнение на отворената САР*.

Възможни са случаи, когато някои от младшите коефициенти на многочлена $c(s)$ са равни на нула: $c_n = c_{n-1} = \dots = c_{n-v+1} = 0$ / $v = 0, 1, 2, \dots$; $c_{n-v} \neq 0$ /. При това

$$W(s) = \frac{b(s)}{c(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + b_2s^{m-2} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{c_0s^n + c_1s^{n-1} + c_2s^{n-2} + \dots + c_{n-v}s^v}. \quad (10.8)$$

Предавателната функция на отворената система обикновено се записва в стандартна форма, при която многочлените в числителя и знаменателя на $W(s)$ имат свободни членове, равни на 1.

За предавателната функция (10.8) стандартната форма на запис има вида:

$$W(s) = \frac{b_m}{c_{n-v} s^v} \frac{(B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + B_2 s^{m-2} + \dots + B_{m-1} s + 1)}{(C_0 s^{n-v} + C_1 s^{n-v-1} + C_2 s^{n-v-2} + \dots + 1)} \quad (10.9)$$

където

$$B_i = \frac{b_i}{b_m}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, m;$$

$$C_i = \frac{c_i}{c_{n-v}}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-v;$$

Величината v във формулата (10.9) се нарича степен на астатизма на САР относно задаващото въздействие $g(t)$, а параметъра

$$K_v = \frac{b_m}{c_{n-v}}, \quad (10.10)$$

се нарича *коэффициент на усилване на отворената система*. Размерността на коефициента на усилване е $[K_v] = \frac{1}{s^v}$. Физически той представлява отношение на установената стойност на v -тата производна на регулируемата величина към постоянна грешка x^0 .

$$K_v = \frac{(p^v y)_{уст}}{x^0} \quad (10.11)$$

На практика най-често се срещат случаите за $v = 0$ /статични САР/, когато

$$W(s) = K \frac{(B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + 1)}{(C_0 s^{n-v} + C_1 s^{n-v-1} + \dots + 1)}, \quad (10.12)$$

и случая $v = 1$ /САР с астатизъм от 1 ред/

$$W(s) = \frac{K_1}{s} \frac{(B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + 1)}{(C_0 s^{n-v} + C_1 s^{n-v-1} + \dots + 1)}. \quad (10.13)$$

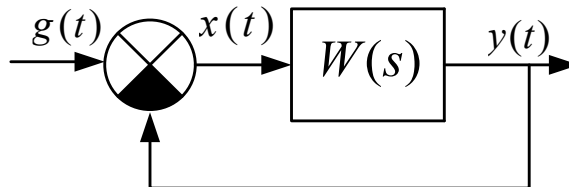
10.3. Предавателна функция на затворената система /главен оператор на САР/ $\Phi(s)$

Представлява отношението на Лапласовия образ на регулируемата величина към Лапласовия образ на задаващото въздействие при нулеви начални условия на функциите $y(t)$ и $g(t)$ и техните производни и нулеви смущения.

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}. \quad (10.14)$$

където $Y(s) = L^{-1}\{y(t)\}$, $G(s) = L^{-1}\{g(t)\}$

При отсъствие на смущения структурната схема може да се приведе към вида, показан на фиг. 10.2.



Фиг. 10.2 Структурни схеми на САР при отсъствие на смущаващи въздействия

За определяне предавателната функция на затворената система, се използва правилото за свързване на звена с единична отрицателна обратна връзка

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}. \quad (10.15)$$

Като се отчита уравнение (10.8) изразът (10.15) може да се преобразува в следния вид:

$$\Phi(s) = \frac{b(s)/c(s)}{1 + b(s)/c(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-v} s^v} \quad (10.16)$$

където

$$a(s) = b(s) + c(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-v} s^v. \quad (10.17)$$

О този начин главния оператор (10.15) лесно може да се определи, ако е известна предавателната функция на отворената система (10.8). Той представлява дробно рационален израз, в числителя на който е многочлена $b(s)$ от числителя на предавателната функция на отворената система, а в знаменателя е характеристичния полином на затворената система $a(s) = b(s) + c(s)$ /сума от многочлените от числителя и знаменателя на предавателната функция на отворената система.

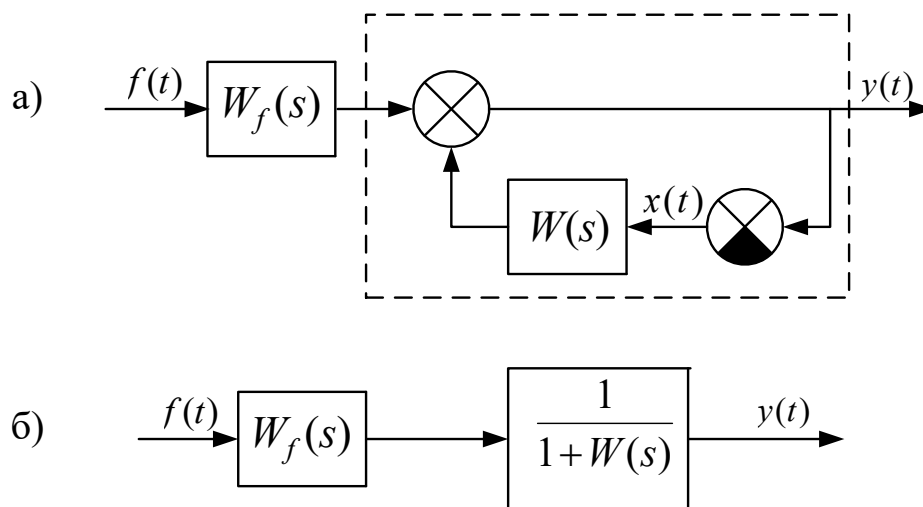
10.4. Предавателна функция на затворената система по смущение $\Phi_f(s)$

Представлява отношението на Лапласовия образ на регулируемата величина към Лапласовия образ на смущаващото въздействие при нулеви начални условия на функциите $y(t)$ и $f(t)$ и техните производни и нулево задаващо въздействие.

$$\Phi_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}, \quad (10.18)$$

където $Y(s) = L^{-1}\{y(t)\}$, $F(s) = L^{-1}\{f(t)\}$.

При определяне на предавателната функция (10.18) задаващото въздействие $g(t)$ и всички останали смущаващи въздействия /ако съществуват/ не се отчитат. В резултат на това, структурната схема на САР се преобразува във вида, показан на фиг. 10.3, а, където обхванатата от пунктирния правоъгълник част може да се замени с едно звено с предавателна функция $W(s) = \frac{1}{1+W(s)}$.



Фиг. 10.3 Структурни схеми на САР за определяне на предавателната функция на затворената система по смущение
а – изходна; б - преобразувана

Като се има в предвид фиг. 10.3, б може да се запише:

$$\Phi_f(s) = \frac{W_f(s)}{1+W(s)} \quad (10.19)$$

От фиг. 10.3, б следва, че предавателната функция на обекта по смущение $W_f(s)$ представлява, предавателната функция на отворената система по смущаващо въздействие $f(t)$. При това разглеждане $W_f(s)$ на основание на израза (10.19) може да се сформира следната правило. За определяне на предавателната функция на САР по някое смущение $f(t)$, приложено в произволно точка от системата, трябва да се определи предавателната функция на отворената система по това смущение и да се раздели на предавателната функция на отворената система плюс 1. Разкъсването на системата, се прави във веригата на главната обратна връзка.

Като се използват изразите (10.3), (10.8) и като се отчита, че $c(s) = c_R(s)c_O(s)$, изразът (10.19) може да се приведе в следния вид:

$$\Phi_f(s) = \frac{b_f(s)/c_O(s)}{1 + b_R(s)b_O(s)/c_R(s)c_O(s)} = \frac{r(s)}{a(s)} = \frac{r_0 s^q + r_1 s^{q-1} + \dots + r_q}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (10.20)$$

където

$$r(s) = b_f(s) c_R(s).$$

Обикновено $q < n$ т. е. предавателната функция на затворената система по смущение е правилна рационална дроб. Знаменателите на предавателните функции (10.20) и (10.16) са еднакви, което е характерно за всички предавателни функции на затворената система.

Ако на САР действат няколко смущения $f_1(t), f_1(t), \dots, f_N(t)$, то за всяко от тях може да се определи предавателна функция по смущение

$$\Phi_{f_k}(s) = \frac{Y(s)}{F_k(s)} = \frac{W_{f_k}(s)}{1 + W(s)} = \frac{r_k(s)}{a(s)}, \quad (10.21)$$

Ако са известни предавателните функции $\Phi_f(s)$ и $\Phi(s)$, то може лесно да се определи диференциалното уравнение на САР. Като се им в предвид (10.14) се определя уравнението на САР в изображения, при отсъствие на смущения

$$Y(s) = \Phi(s) G(s) \quad (10.22)$$

От уравнение (10.18) се получава уравнението на САР в изображения при отсъствие на задаващо въздействие

$$Y(s) = \Phi_f(s) F(s) \quad (10.23)$$

Поради факта, че системата е линейна, то при едновременно действие на задаващо и смущаващо въздействие важи принципът на суперпозицията

$$Y(s) = \Phi(s) G(s) + \Phi_f(s) F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} G(s) + \frac{r(s)}{a(s)} F(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N;$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} G(s) + \frac{W_{f_k}(s)}{1 + W(s)} F(s)$$

от където се определя:

$$a(s) Y(s) = b(s) G(s) + r(s) F(s).$$

Следователно диференциалното уравнение има вида:

$$a(p) y(t) = b(p) g(t) + r(p) f(t), \quad (10.24)$$

или

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g(t) + (r_0 p^q + r_1 p^{q-1} + \dots + r_q) f(t). \quad (10.25)$$

При действие на няколко смущения $f_1(t), f_1(t), \dots, f_N(t)$, според принципа на суперпозицията

$$Y(s) = \Phi(s) G(s) + \sum_{k=1}^N \Phi_{f_k}(s) F_k(s),$$

от където се определя:

$$a(s) Y(s) = b(s) G(s) + \sum_{k=1}^N r_k(s) F_k(s),$$

и диференциалното уравнение има вида:

$$a(p) y(t) = b(p) g(t) + \sum_{k=1}^N r_k(p) f_k(t). \quad (10.26)$$

Като се положи във формула (10.26) $y(t) = g(t) - x(t)$, може да се получи диференциалното уравнение на САР за грешката:

$$a(p) x(t) = c(p) g(t) - \sum_{k=1}^N r_k(p) f_k(t) \quad (10.27)$$

Това уравнение може да се получи и непосредствено от структурната схема на САР, ако се изчисли предварително предавателните функции на затворената система, свързващи сигнала на грешката $x(t)$ със всяко от външните въздействия - $g(t), f_1(t), f_1(t), \dots, f_N(t)$.

Предавателна функция на затворената система по грешка

$$\Phi_x(s) = \frac{X(s)}{G(s)}. \quad (10.28)$$

Предавателна функция на затворената система за грешката по смущение:

$$\Phi_{f_k}^x(s) = \frac{X(s)}{F_k(s)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N; \quad (10.29)$$

Валидни са следните съотношения:

$$\Phi_x(s) = 1 - \Phi(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{c(s)}{a(s)} = \frac{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (10.30)$$

$$\Phi_{f_k}^x(s) = -\Phi_{f_k}(s) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N; \quad (10.31)$$

Изображението за грешката може да се запише:

$$X(s) = \frac{1}{1 + W(s)} G(s) - \frac{W_f(s)}{1 + W(s)} F(s) \quad (10.32)$$

ГЛАВА 11

УСТОЙЧИВОСТ И КАЧЕСТВО НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ

11.1. Понятие за устойчивост на линейни системи за автоматични регулиране

Всяка система за автоматично регулиране трябва да функционира нормално и да бъде нечувствителна към външните смущаващи въздействия, т.е. тя трябва да бъде работоспособна. Работоспособността на системата се основава на една от основните характеристики ѝ - устойчивост.

Определение за понятието Устойчивост - това е свойството на системата да се връща в изходния или близък до него установен режим, след излизането от него в резултат на някакво външно смущение. Неустойчивата система не се връща към равновесното си състояние, от което е излязла по някоя причина, а непрекъснато се отдалечава от него или извършва около него недопустимо големи колебания.

Математически понятието устойчивост може да бъде формулирано по следния начин: линейната система за автоматично регулиране се нарича устойчива ако нейната тегловна функция $w(t)$ остава ограничена при какви да е ограничени по абсолютната стойност смущения.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T w(t) dt < C \quad (11.1)$$

където:

$w(t)$ -теглова функция на системата;

T - време;

C - някоя крайна величина.

От определението следва, че устойчивостта на системата се определя от решението на линеаризираното диференциално уравнение на затворената система.

$$a(p)y(t) = b(p)g(t) + \sum_{k=1}^N r_k(p)f_k(t).$$

Решението може да се запише във вида:

$$y(t) = y_{np}(t) + y_{ycm}(t) \quad (11.2)$$

където общото решение на диференциалното уравнение

$$a(s)y(t) = 0, \quad (11.3)$$

определя преходния процес в системата, преходната съставляваща /общото решение/ $y_{np}(t)$. Установената съставляваща $y_{ycm}(t)$ се намира като частно решение на нехомогенното уравнение.

САР се нарича устойчива, ако преходната съставляваща с течение на времето затихва

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{np}(t) = 0. \quad (11.4)$$

и неустойчива, ако преходния процес с течението на времето е разходящ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{np}(t) \rightarrow \infty \quad (11.5)$$

Системи, в които преходния процес в течение на времето не е нито сходящ, нито разходящ се наричат системи намиращи се на границата на устойчивост.

За нормалната работа на всяка система е необходима да се изпълнява условието за устойчивост (11.5).

За да се изследва устойчивостта на системата е възможно да не се намира общото решение на уравнението (11.3), тъй като то зависи от вида на корените на характеристичното уравнение на системата.

Означава се с $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$ корените на характеристичното уравнение

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (11.6)$$

Приема се, че всички корени са реални и прости, то за преходния процес се получава:

$$y_{np}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t} \quad (11.7)$$

където: $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ - произволни константи. Следователно:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \sum_{k=1}^n A_k \lim_{t \rightarrow \infty} e^{s_k t} \quad (11.8)$$

Корените на характеристичното уравнение могат да се реални или комплексно спрегнати. За реалните корени $s_k = \alpha_k$, а за комплексно спрегнатите корени $s_{k,k+1} = \alpha_k \pm j\beta_k$.

При комплексни корени на уравнението решението е:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n B_k e^{(\alpha_k + j\beta_k)t}$$

$$B_k e^{(\alpha_k + j\beta_k)t} + B'_k e^{(\alpha_k - j\beta_k)t} = B e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t + \varphi)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \sum_{k=1}^n B_k \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha_k + j\beta_k)t} + \sum_{k=1}^n B'_k \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha_k - j\beta_k)t}$$

Корените на характеристичното уравнение могат и да са кратни. Тогава общото решение може да се даде във вида:

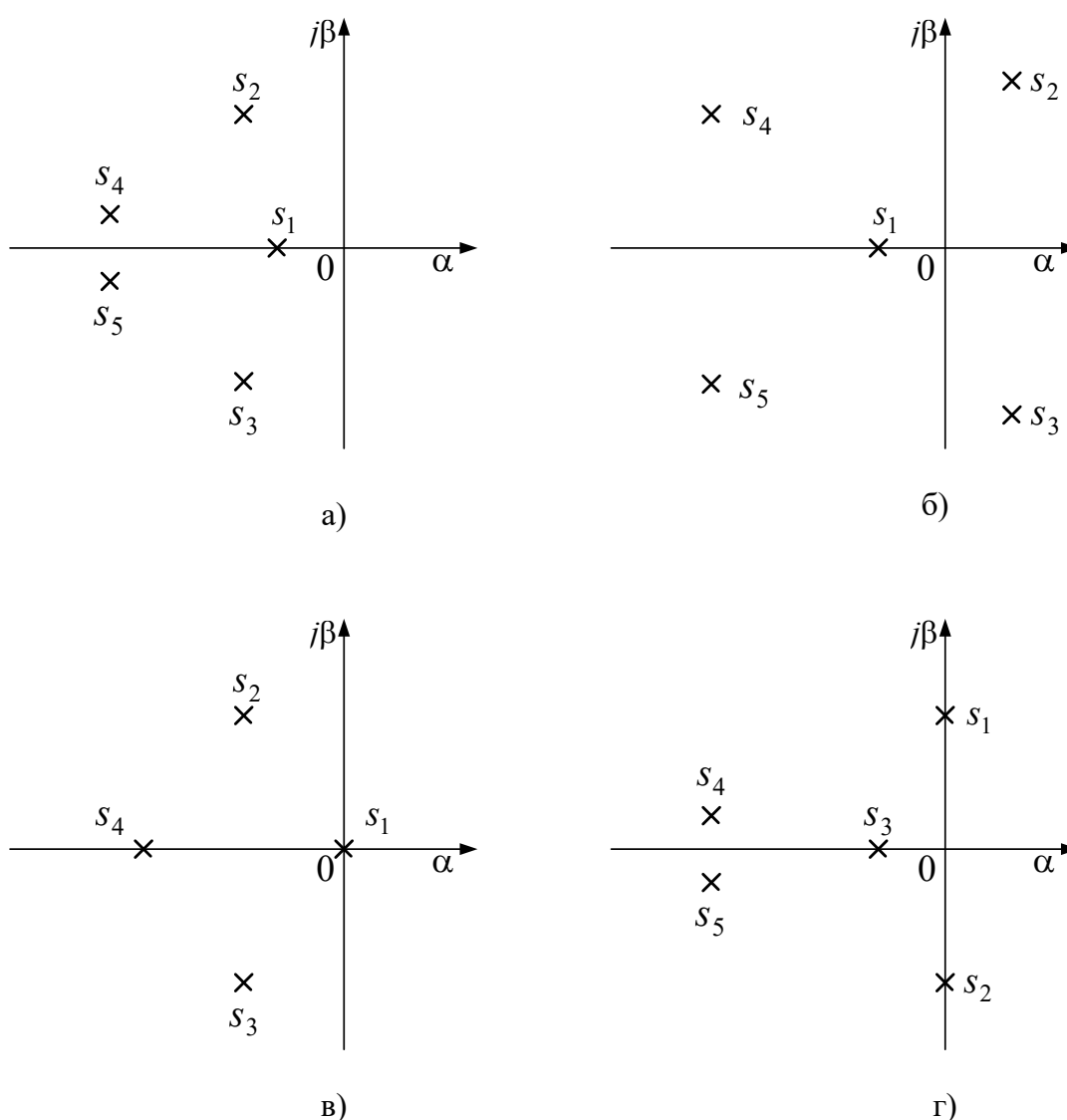
$$y(t) = \sum_{i=1}^r (C_{i0} + C_{i1}t + C_{i2}t^2 + \dots + C_{i,r-1}t^{r-1}) e^{s_i t}$$

В общия случай границата се определя от знака на реалните корени:

$$\lim e^{(\alpha_k + j\beta_k)} = \begin{cases} 0 & \text{за } \alpha_k < 0 \\ 1 & \text{за } \alpha_k = \beta_k = 0 \\ \infty & \text{за } \alpha_k > 0 \end{cases} \quad (11.9)$$

От (11.9) следва необходимото и достатъчно условия за устойчивост на линейните системи: за устойчивостта на линейната САР е необходимо и достатъчно, реалните части на всички корени на характеристичното уравнение да бъдат с отрицателен знак т.е.,

$$\operatorname{Re} s_k < 0 \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.10)$$



фиг. 11.1 Разположение на корените на характеристичното уравнение на САР

а) устойчива; б) неустойчива; в) апериодична граница на устойчивост; г) колебателна граница на устойчивост

Това се отнася както за реалните корени, така и за комплексно спрегнатите. Ако дори един корен на характеристичното уравнение има положителна реална част, то преходния процес ще е разходящ – системата ще е неустойчива.

Корените на характеристичното уравнение могат да се представят като точки в комплексната равнина.

За устойчивостта на линейната система е необходимо и достатъчно, всички корени на характеристичното уравнение да лежат на ляво от имагинерната ос. Ако дори един корен се окаже надясно от имагинерната ос, то системата ще е на границата на устойчивост. Имагинерната ос представлява *границната линия* в равнината на корените, зад която на трябва да преминават корените на характеристичното уравнение.

Системата се намира на *апериодичната граница на устойчивост*, ако характеристичното уравнение на системата (11.6) има поне един нулев корен – фиг.11, в. Такъв корен може да има само при равенство на нула на свободния член $a_n = 0$. При това условие, уравнението се записва:

$$(a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1}) s y(t) = 0, \quad (11.11)$$

т.е. системата се оказва устойчива не спрямо регулируемата величина $y(t)$, а спрямо първата ѝ производна /скоростта ѝ на изменение $\dot{y}(t)$.

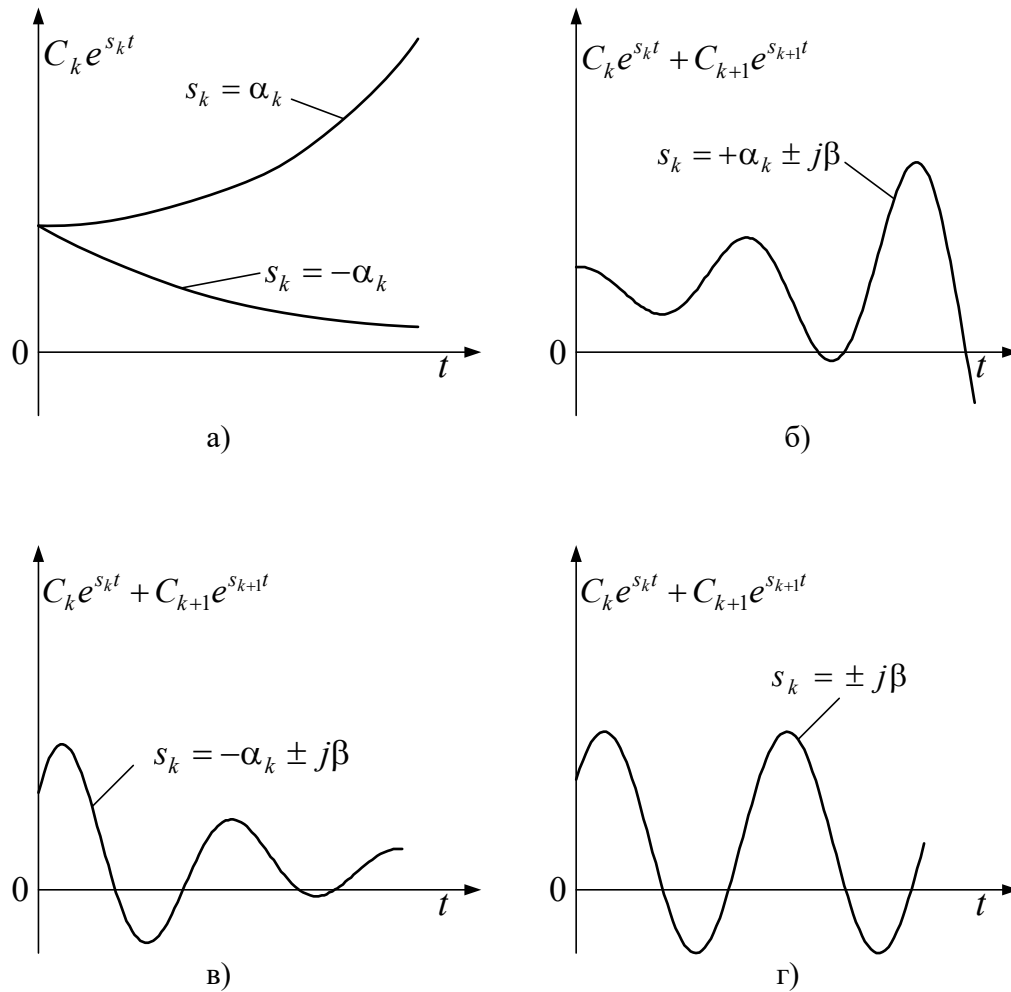
Регулируемата величина може да приема произволни значения. Системата е безразлична /неутрална/ спрямо нея. Такава система се нарича *неутрално устойчива*.

Ако уравнение (11.6) има поне една двойка чисто имагинерни корени, системата се намира на колебателната граница на устойчивост – фиг. 11.1, г. При това в системата се установяват незатихващи хармонични колебания с постоянна амплитуда.

Разгледаните условия за устойчивост се отнасят за линейни САР описвани от линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти.

Намирането на корените на характеристичното уравнение може да стени с използването на съвременни софтуерни продукти. От там може и по пряк път да се определи устойчивостта на системата.

Важно е обаче, да се знаят признаците, по които може да се съди за устойчивостта на САР без непосредственото намиране на корените на характеристичното уравнение. Тези признаци се наричат *критерии за устойчивост*. По тях може да се съди за устойчивостта на САР, без определяне корените на характеристичното уравнение, а непосредствено от коефициентите му.



Фиг. 11.2 Изменение на преходната съставляваща при различни корени на характеристичното уравнение.

Най-простият *необходим*, но недостатъчен критерий за устойчивост се получава, като се представи характеристичното уравнение във вида:

$$a(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

и се приеме, че системата е устойчива, т.е.

$$s_k = -\alpha_k + j\beta,$$

например за:

$$s_1 = -\alpha_1, s_{23} = -\alpha_2 \pm j\beta_2 \dots, s_n = -\alpha_n$$

се получава:

$$\begin{aligned} a(s) &= a_n(s + \alpha_1)(s + \alpha_2 - j\beta_2)(s + \alpha_2 + j\beta_2) \dots (s + \alpha_n) = \\ &= a_n(s + \alpha_1)(s^2 + 2\alpha_2 s + \alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (s + \alpha_n) \end{aligned} \quad (11.12)$$

От (11.12) следва, че характеристичния полином на устойчивата система, може да се представи във вид на произведение на многочлени от първа и втора степен, имащи само положителни коефициенти. Вижда се, че в резултат на умножение на отделните множители се получава полином имащ само

положителни коефициенти. Тогава може да се формулира необходимия критерий за устойчивост: *Всички коефициенти на характеристичното уравнение трябва да се с еднакъв знак, например положителни.*

За системи описвани с диференциални уравнения от първи и втори ред, необходимия критерий е и достатъчен.

За изследване на системи от по-висок ред е необходимо използването на допълнителни критерии.

11.2. Критерий за устойчивост на Раус-Хурвиц

Задачата за търсене на критерии за устойчивост на системи, описвани с диференциални уравнения от произволен ред е била формулирана от Максвел през 1868г. Критерият за устойчивост на Раус-Хурвиц се отнася към алгебричните критерии за устойчивост, налагащи ограничения към коефициента на характеристично уравнение. За първи път условията за устойчивост са били формулирани в 1875 г. във вид на таблици от проф. Раус от Кембриджския университет. По-късно в 1895г. немският математик Адолф Хурвиц предложил критерий за устойчивост във вид на система от детерминанти. Този критерий е разработен на Хурвиц по молба на проф. Стодола, който се занимавал с изследване процесите на регулиране на водни турбини. Двата подхода водят до получаване на едни и същи алгебрични неравенства и затова полученият критерий се нарича критерий на Раус-Хурвиц.

Разгледа се критерия във формата на дадена от Хурвиц.

Ако характеристичното уравнение на затворена система има вид (11.6) и ако $a_0 > 0$, то за устойчивост на линейната САР, необходимо и достатъчно условие е да бъдат положителни n -те детерминанти на Хурвиц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_n$. Детерминантите на Хурвиц представляват диагоналните детерминанти на квадратната матрица от n -ти ред, съставена от коефициентите на характеристичното уравнение.

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \quad (11.13)$$

от където се определят:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots; \quad \Delta_n = |H|$$

може да се достигне до извода, че

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Последната детерминанта на Хурвиц може да не се пресмята, а условието $\Delta_n > 0$ се изпълнява при $a_n > 0$ и $\Delta_{n-1} > 0$

Условията, при които системата се намира на границата на устойчивост се получават от приравняването на нула на последната детерминанта Δ_n при положителни всички останали детерминанти.

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} = 0 \text{ или } a_n = 0 \text{ и } \Delta_{n-1} = 0.$$

Апериодичната граница на устойчивост се определя от условието $a_n = 0$, а колебателната, от $\Delta_{n-1} = 0$.

За характеристичните уравнения от ред по-висок от четвърти изчислението на детерминантите е свързано със значителни трудности. За уравненията до четвърти ред условията за устойчивост имат следния вид

а) уравнения от първи и втори ред.

Тук условието за положителност на коефициентите е необходимо и достатъчно

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0 \quad (11.14)$$

б) уравнения от трети ред.

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0.$$

За него се записва:

$$a_0 > 0 \quad \Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0 \quad \text{т. е. } a_3 > 0 \quad (11.15)$$

т.е. всички коефициенти трябва да са положителни и освен това, $\Delta_2 > 0$.

$$\begin{aligned} a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \\ a_1 a_2 > a_0 a_3 \end{aligned} \quad (11.16)$$

в) уравненията от четвърти ред

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

Аналогично се получават условията за устойчивост

$$\begin{aligned} a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0 \\ a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_4 a_1^2 \end{aligned} \quad (11.17)$$

За изследване на по-сложни системи може да се използват условията за устойчивост на теоремата на Лиенард–Шипар. Необходимо и достатъчно за устойчивостта на системата да се положителни коефициентите на характеристичното уравнение и детерминантите на Хурвиц от нечетен ред $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-3}, \Delta_{n-5} \dots$.

Пример 11.1: Характеристичното уравнение на система за математическо регулиране има вид:

$$10s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 10s = 0$$

Очевидно е, че един от корените на уравнението е нулев. Системата ще се намира на границата на устойчивост, ако всички останали корени на уравнението имат отрицателни реални части. Затова е необходимо да се изпълняват условията за устойчивост на полинома.

$$10s^3 + 5s^2 + 2s + 10$$

В случая коефициентите на уравнението са положителни, но детерминантата на Хурвиц

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -90,$$

има отрицателен знак, т.е. системата е неустойчива.

Критерия на Хурвиц дава отговор на въпроса дали една САР е устойчива или не. За практически случаи обаче това не е достатъчно. В много случаи е необходимо да се определи стойността на един или няколко параметъра на САР, така че тя да е устойчива. Използвайки критерия на Хурвиц можем да определим допустимите стойности на параметрите за които системата запазва устойчивостта си.

Пример 11.2: Зададена е предавателната функция на отворената система

$$W(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}.$$

Трябва да се определи при какви стойности на параметъра K затворената система е устойчива.

Предавателна функция на затворената система се получава от вида:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

Характеристичното уравнение се получава от вида:

$$a(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Детерминантата на Хурвиц има вида:

$$H = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & K & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & K \end{vmatrix}$$

От уравнение (11.17) се получава:

$$3 \times 3 \times 2 > 1 \times 2^2 + K \times 3^2 \Rightarrow \frac{14}{9} > K$$

За да е устойчива системата трябва коефициента $\frac{14}{9} > K$ и $K > 0$.

11.3. Критерий на Щур (Schur-Cohn stability criterion), известен също като метод на Щур-Кон

Щур заменя сравнително дългото и тежко изчисление на детерминантата на Хурвиц с привеждане на коефициентите на диференциалното уравнение. Привеждането може да се извърши от ляво надясно или от дясно на ляво. То завършва при получаване на три положителни коефициенти, които са достатъчно условие, че и при по-нататъшно привеждане ще се получат положителни коефициенти (квадратно уравнение от втори ред).

Редът, по който се привеждат коефициентите, най-добре се показва върху подходящ пример. Ако е дадено характеристичното уравнение на системата

$$s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 12s^2 + 6s + 1 = 0,$$

коефициентите му се записват в един ред, като се подчертава всеки втори отпред назад или обратно отзад напред, ако редукцията се извършва от ляво надясно. След това се търси такова число, с което трябва да се умножи първият подчертан коефициент (съответно първият от зад напред), че умножен с него, той да дава първия неподчертан коефициент. По същият начин с това число се умножават всички подчертани коефициенти и се написва резултата под

неподчертаните. Двата реда коефициенти се изваждат един от друг. Първият член се анулира. Подчертаните коефициенти се приписват без промяна. Новият ред коефициент е с един по-малко. Действието се повтаря с него, както с първият ред. Привеждането продължава докато се получат три коефициента с положителни знаци.

САР е устойчива, ако всички редове имат положителни коефициенти. Появата на отрицателни коефициенти означава неустойчивост.

1 <u>3</u> 5 <u>12</u> 6 <u>9</u> 1 1 4 3	$\lambda_1 = \frac{1}{3}$
- 3 <u>1</u> 12 <u>3</u> 9 1 3 9 3	$\lambda_2 = 3$
- 1 <u>3</u> 3 <u>6</u> 1 1 2	$\lambda_3 = \frac{1}{3}$
- 3 <u>1</u> 6 <u>1</u> 3 3	$\lambda_4 = 3$
1 <u>3</u> 1 1	$\lambda_5 = \frac{1}{3}$
3 1 - 3	$\lambda_6 = 6$
1	

и т. н , но не е необходимо да се продължава до края. Системата е устойчива.

Същият резултат ще се получи, ако се извърши привеждането отпред назад. Крайният резултат е еднакъв за двата случая, но обикновено привеждането в една от посоките се извършва по-бързо т.е. при по-малък брой стъпки, особено в случаите на неустойчиви системи.

Когато коефициента са десетични числа, по удобно е да се представят във вид на прости дроби. В обратен случай вследствие на закръгленията може да се достигне до грешен резултат.

Критерият на Шур е удобен за системи от по-висок ред. Резултатът може да се използва при оценката на качеството на САР.

11.4. Критерий за устойчивост на Михайлов

Критерият на Михайлов е честотен и е бил предложен в 1936 г. Той позволява да се съди за устойчивостта на затворена система по вида на кривата на Михайлов, представляваща ходографа на вектора.

$$a(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n, \quad (11.18)$$

т. е. в характеристичния полином на затворена система е положено $s = j\omega$. Като се отдели реалната и имагинерна част се получава:

$$a(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

където:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \\ Y(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

Кривата на Михайлов се строи в равнината (X, jY) по точки в съответствие с израза (11.19). Критерият на Михайлов се формулира по следния начин: *за устойчивостта на линейната САР е необходимо и достатъчно векторът $a(j\omega)$ при изменение на ω от 0 до ∞ да се завърти на ъгъл $\psi_a = n\frac{\pi}{2}$ по посока обратна на часовниковата стрелка. Тук n е степен на характеристичното уравнение на изследваната система.*

За доказателство характеристичния полином се представя във вида:

$$a(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) \dots (s - s_n) \quad (11.20)$$

където:

$s_1, s_2, s_3 \dots s_n$ - корени на характеристичното уравнение.

Кривата на Михайлов се описва от уравнението:

$$a(j\omega) = a_0(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)(j\omega - s_3) \dots (j\omega - s_n) \quad (11.21)$$

Всеки съмножител в скобите представлява комплексно число. Следователно $a(j\omega)$ представлява произведение на n комплексни числа. При умножение аргументите на комплексните числа се събират. Резултатния ъгъл на завъртане на вектора $a(j\omega)$ при изменения на ω от 0 до ∞ е

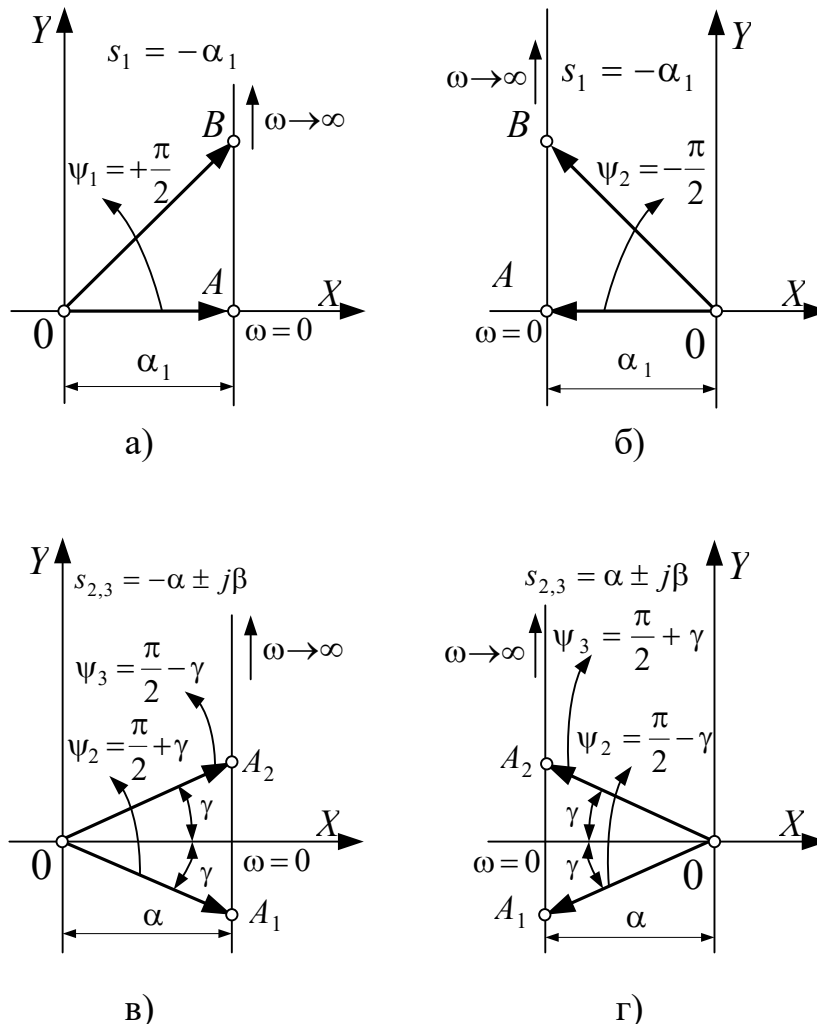
$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_n, \quad (11.22)$$

където $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots \psi_n$ - съставляващи на ψ_a за определените множители $(j\omega - s_i)$.

Определя се всяко събираемо по отделно.

1. Нека някой от корените, например s_1 е реален отрицателен - $s_1 = -\alpha_1$, където $\alpha_1 > 0$. Множителя в (11.21) ще има вида $(\alpha_1 + j\omega)$. Построява се ходографа на този вектор в комплексната равнина при изменение на ω от нула до безкрайност. При $\omega = 0$ реалната част е $X(\omega) = \alpha_1$, а имагинерната е $Y(\omega) = 0$. Върха на вектора е в точка A , лежаща на реалната ос. При $\omega \neq 0$ вектора ще се променя така, че неговата реална

част ще е α_1 , а имагинерната - $Y(\omega) = \omega$ - точката B на графиката. При увеличаване на честотата до безкрайност края на вектора отива към безкрайност, като върха на вектора остава на вертикалната права, преминаваща през точка A , а вектора се завърта обратно на часовата стрелка. Резултантният ъгъл на завъртане е $\psi_1 = +\frac{\pi}{2}$.



Фиг. 11.3. Графично представяне на принципа на аргумента

- Приема се, че s_1 е реален положителен - $s_1 = \alpha_1$, където $\alpha_1 > 0$. Множителя в (11.21) ще има вида $(-\alpha_1 + j\omega)$. Построява се ходографа на този вектор в комплексната равнина при изменение на ω от нула до безкрайност аналогично на предишния случай. Резултантният ъгъл на завъртане е $\psi_1 = -\frac{\pi}{2}$. Знакът минус показва, че векторът се завърта по часовата стрелка.
- Нека два корена например s_2 и s_3 са комплексно спрегнати с отрицателна реална част $s_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$. Множителите ще имат вида $(\alpha - j\beta + j\omega)(\alpha + j\beta + j\omega)$. При $\omega = 0$ началните положения на двата вектора се определят от точките A_1 и A_2 . Първия вектор е завъртан

спрямо реалната ос по часовата стрелка на ъгъл $\gamma = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$, а другия вектор на същия ъгъл обратно на часовата стрелка. При увеличение на ω от 0 до ∞ върховете на векторите отиват към безкрайност и двата вектора се сливат с имагинерната ос.

Резултатния ъгъл на завъртане на първия вектор е $\psi_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma$, а на втория $\psi_3 = \frac{\pi}{2} - \gamma$. Вектора, съответстващ на произведението $(\alpha - j\beta + j\omega)(\alpha + j\beta + j\omega)$ се завърта на ъгъл $\psi_2 + \psi_2 = 2\frac{\pi}{2}$.

4. При корени s_2 и s_3 комплексно спрегнати с положителна реална част $s_{2,3} = +\alpha \pm j\beta$. При аналогични разсъждения се получава се завърта на ъгъл $\psi_2 + \psi_2 = -2\frac{\pi}{2}$.

Не е трудно да се види, че всеки от множителите съответства на завъртане на радиус-вектора $a(j\omega)$, при изменение на ω от 0 до ∞ на ъгъл $\pm \frac{\pi}{2}$ в случая на реален корен и на ъгъл $\pm \left(\frac{\pi}{2} \mp \gamma \right)$ за комплексен корен, където $\gamma = \arctg \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$. На двойка комплексни корени съответстват два множителя, завъртащи $a(j\omega)$ на ъгъла $\pm \pi$. Положителните завъртания /обратно на часовата стрелка/ се при отрицателни реални части на корена.

Ако се приеме, че характеристичното уравнение има l корени с положителна реална част, то на тях ще съответства сума от ъгли на завъртане $-l \frac{\pi}{2}$. Всички останали $(n-l)$ корени на характеристичното уравнение ще имат отрицателни реални части и ще им съответства сума от ъгли на завъртане $(n-l) \frac{\pi}{2}$.

Следователно резултатния ъгъл на завъртан на $a(j\omega)$ ще бъде:

$$\psi_a = (n-l) \frac{\pi}{2} - l \frac{\pi}{2} = n \frac{\pi}{2} - l\pi \quad (11.23)$$

При устойчивите системи всички корени на характеристичното уравнение трябва да са с отрицателни реални части и

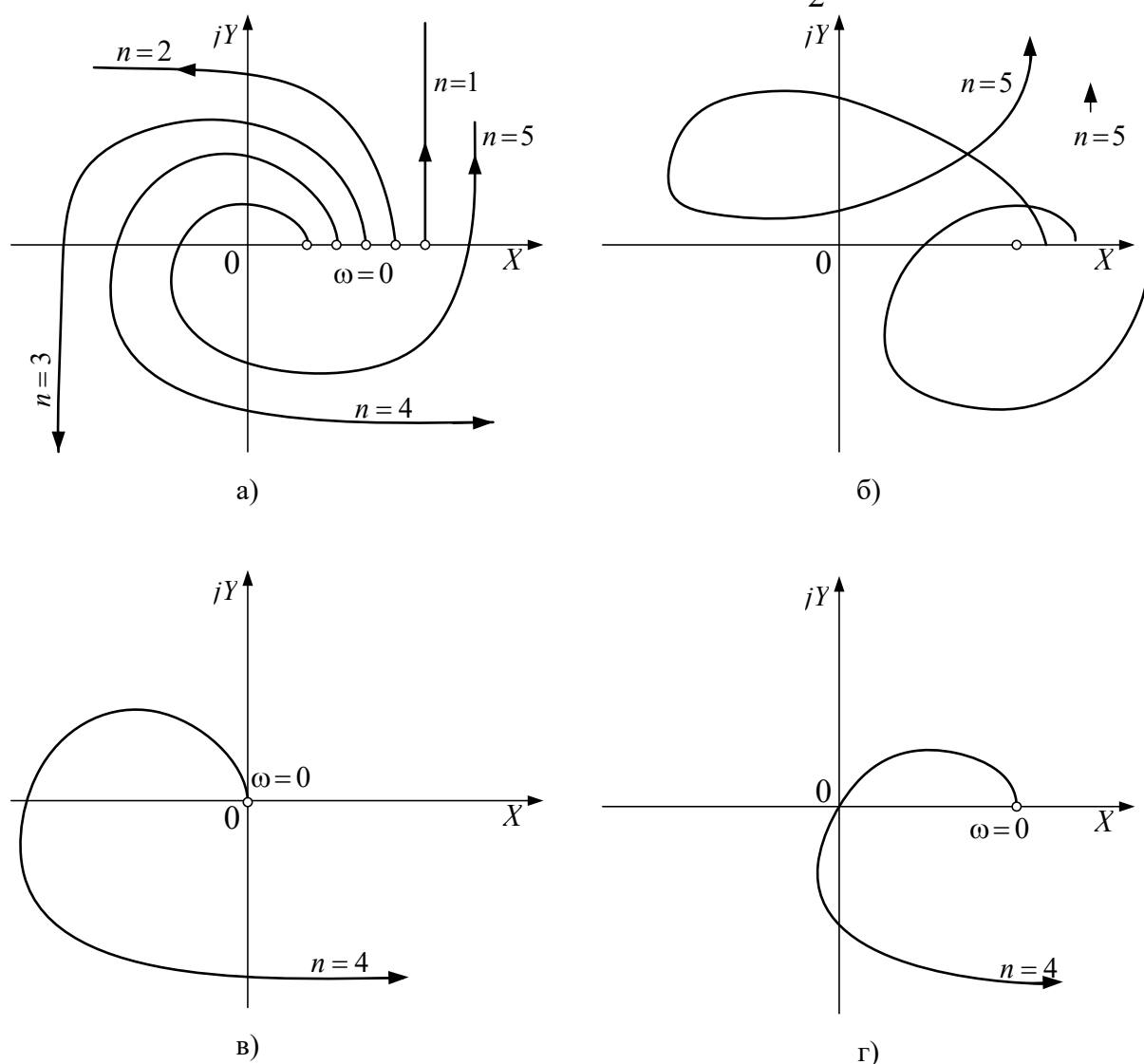
$$\psi_a = n \frac{\pi}{2}. \quad (11.22)$$

Следва, че за устойчивите системи кривите на Михайлов трябва да преминават последователно през толкова квадрати, колкото е степента на характеристичното уравнение в посока обратна на движението на

часовниковата стрелка. Кривата на Михайлов винаги започва от точка върху положителната реална полу ос (при $\omega=0$ $a(j0)=a_n$). При $\omega \rightarrow \infty$, $a(j\omega) \rightarrow \infty$, при това за нечетни n кривата клони към безкрайност по посока на имагинерната ос jY , а при n -четно, по посока на реалната ос X .

Кривата на Михайлов за устойчиви системи винаги има спираловидна форма, при което крайт ѝ отива към безкрайност в този квадрант на комплексната равнина, номера на който е равен на степента на характеристичното уравнение фиг. 11. 4, а. Брой квадранти повече от n кривата на Михайлов не може да премине. Неустойчивостта на системата е свързана с това, че в кривата на Михайлов се нарушава последователността на преминаване през квадрантите,

вследствие на което ъгъла на завъртане е по-малък от $n \frac{\pi}{2}$ - фиг. 11. 4, б.



Фиг. 11.4 Криви на Михайлов

а) устойчиви системи; б) неустойчива система;

в) аperiодична граница на устойчивост; г) колебателна граница на устойчивост

Ако системата се намира на аperiодичната граница на устойчивост, то свободния член на характеристичния полином $a_n = 0$, кривата на Михайлов

започва от началото на координатната система - фиг. 11. 4, в. За колебателната граница на устойчивост кривата на Михайлов минава през началото на координатната система - фиг. 11. 4, з.

Изчислителен критерий на Михайлов-Леонард

Понякога е удобно да бъде използван изчислителния критерий на Михайлов-Леонард. За да бъде една САР устойчива е необходимо:

а) $a_n > 0$

б) $X(\omega)=0$ и $Y(\omega)=0$ трябва да имат редуващи се корени. Тъй като кривата на Михайлов винаги започва от точка на реалната ос, където имагинерната част е равна на нула $Y(\omega_1)=Y(0)=0$, то при постепенно увеличение на честотата от нула до безкрайност трябва да се нулира отначало реалната част $X(\omega_2)=0$, после имагинерната $Y(\omega_3)=0$, после пак реалната $X(\omega_4)=0$ и т. н. като $0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots \omega_n$.

в) корените на $X(\omega)=0$ и $Y(\omega)=0$ трябва да се редуват по големина (това е гаранция за последователно пресичане на координатните оси).

г) за да се развива ходографа на Михайлов наляво е необходимо.

$$X(0) \text{ и } \left(\frac{dY}{d\omega} \right)_{\omega=0} \text{ да имат еднакви знаци}$$

Пример 11.3:

$$a(s) = 10s^4 + 20s^3 + 11s^2 + 6s + 2$$

$$X(\omega) = \operatorname{Re}\{a(j\omega)\} = 2 - 11\omega^2 + 10\omega^4 = 0$$

$$Y(\omega) = \operatorname{Im}\{a(j\omega)\} = 6\omega - 20\omega^3 = 0$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{11 \pm 6,4}{20}}$$

$$\omega_1 = 0.932 \quad \omega_2 = 0.48$$

$$\omega_3 = 0 \quad \omega_4 = 0.55 \quad \text{не се отчитат отрицателните корени}$$

1) $a_n = 2 > 0$

2) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ са реални

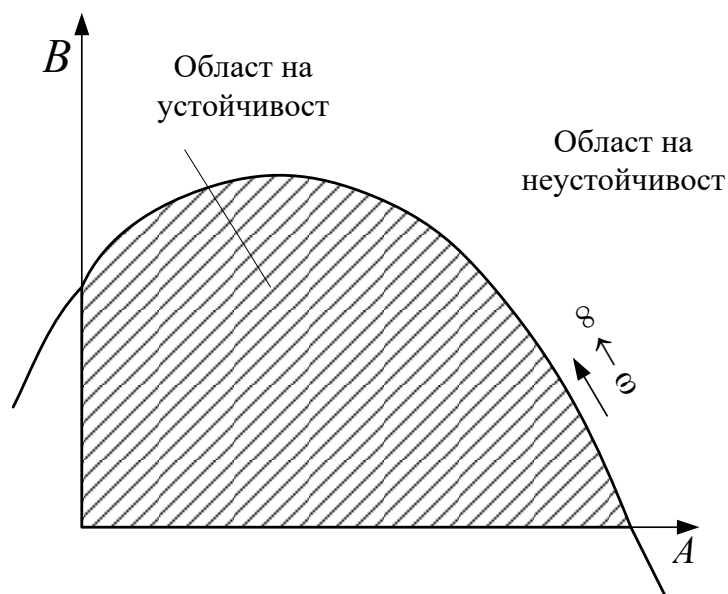
3) 0; 0.48; 0.55; 0.932 - корените се редуват

4) $X(0) = 2$ и $\left(\frac{dY}{d\omega} \right)_{\omega=0} = (6 - 60\omega^2)_{\omega=0} = 6$ т.е. знаците са еднакви и

следователно системата е устойчива.

11.5. Област на устойчивост на системата за автоматично регулиране D-разбиване

При проектиране на САР, сравнително често се изисква да се определи влиянието на някои от променливите параметри върху устойчивостта на системата. В този случай се строи областта на устойчивост на системата в пространството на тези променливи параметри. *Областта на устойчивост определя съвкупността от значенията на параметрите, за които тя е устойчива.* Цялото пространство извън устойчивата област се нарича неустойчива област. За всички точки от него е неустойчива.



Фиг. 11.5 Област на устойчивост по два параметъра

Ако броят на променливите параметри е n , то в общия случай построението на устойчивата област се води в n – мерно пространство. За решаване на практически задачи, обаче n не надминава три. Критерият на Михайлов широко се използва за построяване на областта на устойчивост в равнината на два променливи параметъра A и B , ако те влизат в коефициентите на характеристичното уравнение линейно или във вид на произведение AB . За колебателната граница на устойчивост кривата на Михайлов минава през началото на координатната система, т.е. $a(j\omega)=0$. Това изискване може да се удовлетвори чрез избор на параметри A и B . При това уравнение на кривата на Михайлов се разпада на две уравнения.

$$\left. \begin{aligned} X(\omega, A, B) &= 0 \\ Y(\omega, A, B) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (11.22)$$

където ω – стойност на чисто имагинерния корен на системата, т. е. честотата на незатихващите колебания на системата.

От двете уравнения се изключва честотата ω и се намира връзката между двата параметъра под формата на някаква алгебрична зависимост

$$A = A(B)$$

Задават се стойности на параметъра B в областта на допустимите му стойности

$$B_{\min} \leq B \leq B_{\max}$$

и се определят съответните стойности на параметъра A - фиг. 11.5. Зависимостта се построява по точки. Разглежда се само частта от кривата лежаща в първи квадрант, тъй като параметрите на настройка са само реални положителни числа.

Такъв подход към определяне на устойчивата област се нарича D - разбиване. Областта на устойчивост се определя от правилото на щриховката, което гласи, че при увеличаване на ω щриховката се нанася от лявата страна на кривата, ако детерминантата е положителна.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial A} & \frac{\partial X}{\partial B} \\ \frac{\partial Y}{\partial A} & \frac{\partial Y}{\partial B} \end{vmatrix} > 0$$

и отъясно, ако е отрицателна $\Delta < 0$. При това устойчивата област се намира от към страната на щриховката.

Ако е трудно да се определи аналитично знака на детерминантата, много често се определя по някой от алгебричните критерии устойчивостта на системата по произволно избрана точка от равнината на параметрите. Според това дали системата е устойчива или неустойчива за избраната точка се определя дали областта в която тя лежи е устойчива или неустойчива.

Пример 11.4 за построяване област на устойчивост.

Зададена е предавателната функция на отворената система:

$$W(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

където: k_1 , T_1 , T_2 -съответно времеконстанти и коефициент на усилване. Да се построи областта на устойчивост на затворената система по k_1 и T_1 при $T_2 = const$.

Решение: Определя се вида на характеристичния полином на затворената система

$$a(s) = M(s) = s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k_1$$

Полага се $s = i\omega$ и се получава комплексната функция на Михайлов. Отделят се реалната и имагинерна съставляващи на функцията

$$X(\omega, k_1, T_1) = k_1 - \omega^2(T_1 + T_2)$$

$$Y(\omega, k_1, T_1) = \omega - \omega^3 T_1 T_2.$$

Реалната и имагинерна части се приравняват на 0, което съответства на преминаване на кривата на Михайлов през центъра на координатната система, т. е. приема се, че системата се намира на колебателната граница на устойчивост.

$$k_1 - \omega^2(T_1 + T_2) = 0$$

$$\omega - \omega^3 T_1 T_2 = 0$$

Изключва се честотата ω от двете алгебрични уравнения и се получава връзката между двата параметъра

$$k_1 = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2},$$

което е уравнение на хипербола - фиг. 11.5. За определяне коя от двете области, под или над кривата е област на устойчивост се намират частните производни

$$\frac{\partial X}{\partial T_1} = -\omega^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial T_1} = -\omega^2 T_2$$

$$\frac{\partial X}{\partial k_1} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial k_1} = 0$$

и се съставя детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 1 \\ -\omega^2 T_2 & 0 \end{vmatrix} = \omega^2 T_2 > 0.$$

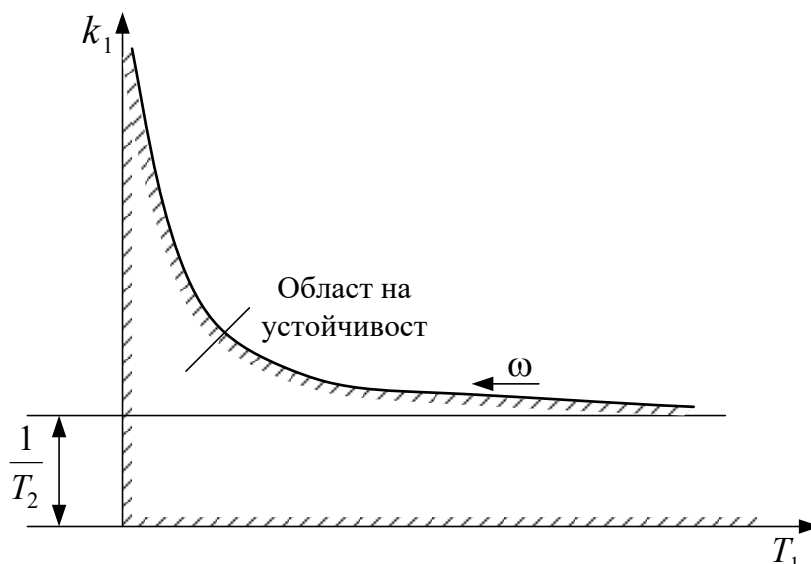
Тъй като и времеконстантата T_2 и честотата ω са положителни числа в целия диапазон на тяхното изменение знакът на детерминантата е винаги положителен. Посоката на нарастване на ω по дължината на кривата се определя от уравнението

$$\omega - \omega^3 T_1 T_2 = 0,$$

откъдето

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}.$$

При нарастване на T_1 честотата ω намалява и обратно, от което следва, че честотата се увеличава по посока на намаляващите стойности на времеконстантата. Областта на устойчивост се намира отляво по посока на нарастването на ω - фиг. 11.5.



Фиг. 11. 5 Област на устойчивост към пример

11.6. Критерий за устойчивост на Найквист

Този критерий е предложен в 1932 г. от американеца Найквист /Nyquist/ за изследване на устойчивостта на усилватели с обратна връзка. Той е основан на разглеждането на АФЧХ на отворената система, по вида на която се съди за устойчивостта на затворената система. АФЧ на отворената система може да бъде както аналитично, така и експериментално получена, което е важно предимство на критерия.

Разглежда се функцията

$$W_1(s) = 1 + W(s) = \frac{a(s)}{c(s)} = \frac{a_0 s^n + a_{11} s^{n-1} + \dots + a_x}{c_0 s^n + c s^{n-1} + \dots + c_x} \quad (11.23)$$

където

$$W(s) = \frac{b(s)}{c(s)} \text{ - АФХ на отворената система}$$

$a(s)$ - характеристичен полином на затворена система

$b(s)$ - характеристичен полином на отворена система

Полага се $s = j\omega$, тогава:

$$W_1(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{a(j\omega)}{c(j\omega)}. \quad (11.24)$$

При изменение на ω от 0 до ∞ ъгълът на завъртане на вектора $W_1(j\omega)$ е

$$\varphi = \varphi_a - \varphi_c, \quad (11.25)$$

където

$$\varphi = \arg \{W_1(j\omega)\},$$

$$\varphi_a = \arg \{a(j\omega)\},$$

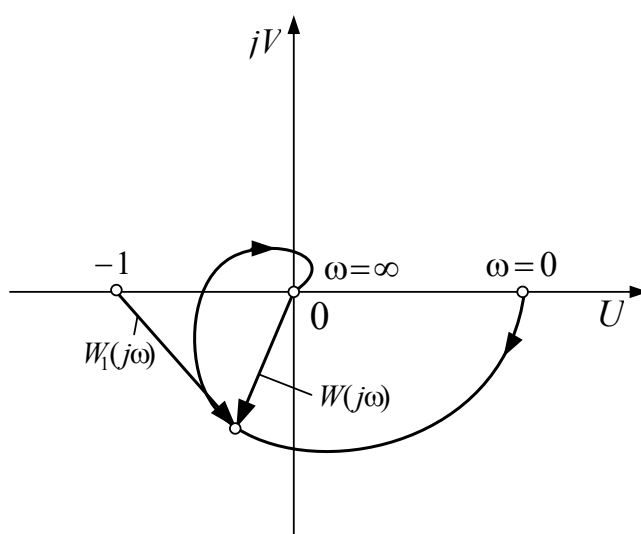
$$\varphi_c = \arg \{c(j\omega)\}.$$

Известно е, че за устойчива система $\varphi_a = n \frac{\pi}{2}$. Ъгълът φ_c може да се определи от по-общият израз:

$$\varphi_c = n \frac{\pi}{2} - l\pi$$

т.е. характеристичното уравнение на отворената система има корени с положителна реална част. От (11.25) се определя:

$$\varphi = \varphi_a - \varphi_c = n \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2} + l\pi = l\pi \quad (11.26)$$

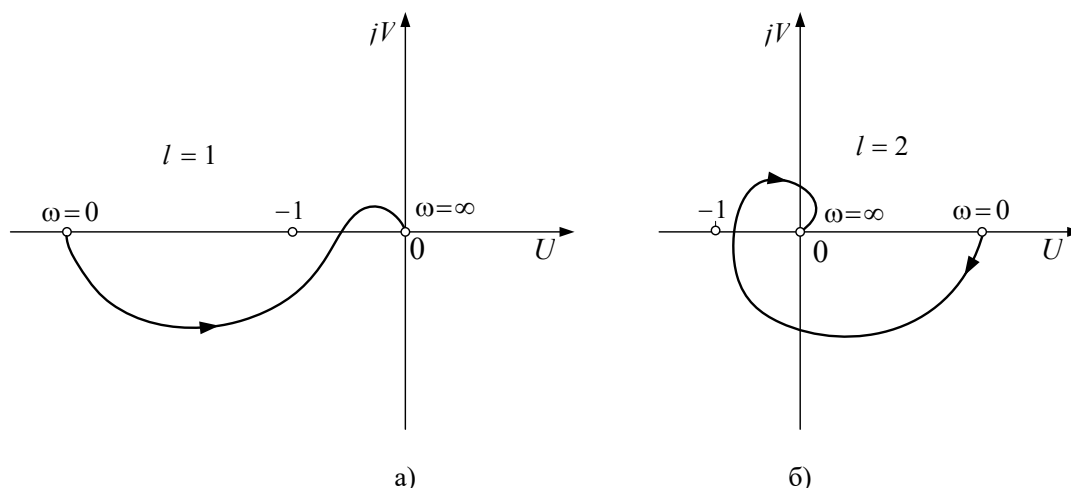


Фиг. 11.6. Построяване на АФЧХ на отворената система

Следователно за устойчива затворена система векторът $W_1(j\omega)$ при изменение на ω от 0 до ∞ ще се завърти на ъгъл $l\pi$ в положително направление-обратно на часовниковата стрелка. Тъй като функцията $W(j\omega)$ се отличава от $W_1(j\omega)$ с -1 , то за устойчива затворена система вектора $W(j\omega)$ при изменение на ω от 0 до ∞ ще се завърти на ъгъл $l\pi$ спрямо точката с координати $(-1, j0)$. С други думи АФХ на отворената система трябва да обхване $\frac{l}{2}$ пъти точката $(-1, j0)$ (фиг. 11.6).

На основание на гореизложеното критерия на Найквист се формулира така: затворената САУ е устойчива, ако при изменение на ω от 0 до ∞ , АФХ на отворената система $W(j\omega)$ обхване $\frac{l}{2}$ точката $(-1, j0)$, в положително направление: където l - брой корени на характеристичното уравнение на отворената система лежащи в дясната полуравнина /с положителна реална част/.

Ако отворената система е устойчива ($l=0$), то за устойчивостта на затворената система, е необходимо $W(j\omega)$ да не обхваща точката $(-1, j0)$.



Фиг. 11.7. Ходографи на устойчиви затворени системи

а – отворената система е неустойчива $l = 1$,

б – отворената система е устойчива $l = 0$

Някои особености при приложение на критерия на Найквист се появяват при изследване на системи неутрални в отворено състояние, т. е. имат нулеви корени, а също и системи намиращи си в отворено състояние на колебателната граница на устойчивост, т. е. имащи чисто имагинерни корени.

Условието САР да е на колебателната граница на устойчивост е когато ходографа преминава през точката $(-1, j0)$, или $W(j\omega) = -1 + j0$, което може да се запише във вида:

$$1 + W(j\omega) = 0. \quad (11.27)$$

Последния израз представлява характеристично уравнение, което се нулира при чисто имагинерен корен $s = j\omega$.

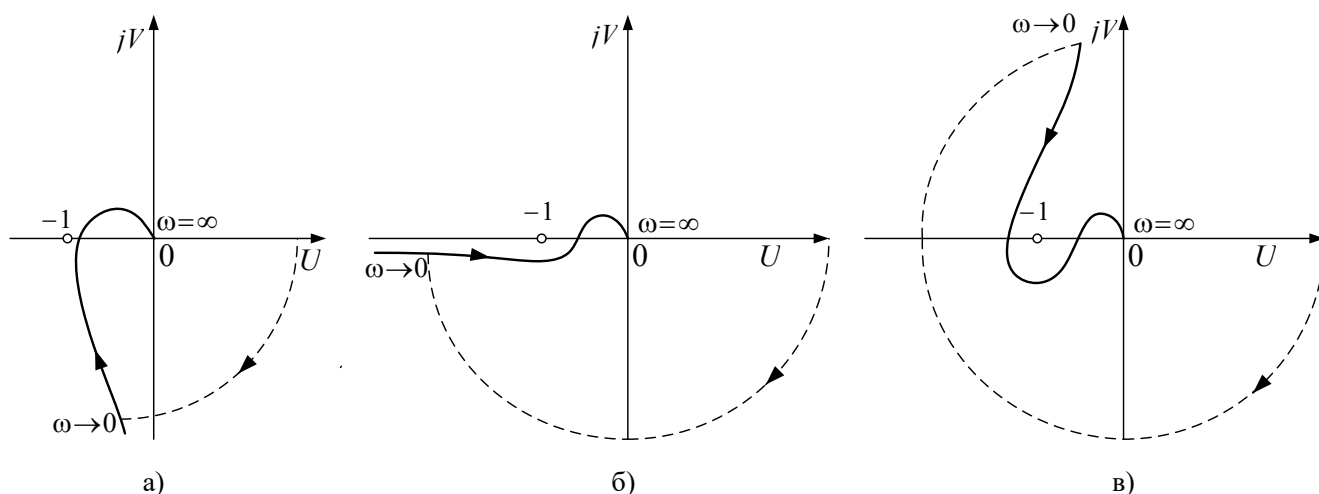
Ако $c(s)$ има един нулев корен, ходографа $W(j\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ клони към безкрайност. В този случай за запазване формулировката на критерия, за устойчиви в отворени състояния системи се включва нулевия корен в лявата полуплоскост обхващайки го отдясно с дъга с безкрайно малък радиус. При това ходографа $W(j\omega)$ клонящ при $\omega \rightarrow 0$ към безкрайност, се допълва с част от окръжност с безкрайно голям радиус, която се прекарва по направление на часовниковата стрелка от положителна реална ос, т.е. на ъгъл $\frac{\pi}{2}$.

При няколко нулеви корени се постъпва аналогично, като ъгълът на допълване на $W(j\omega)$ с окръжност с безкрайно голям радиус се определя от

$$\varphi_{don} = \nu \frac{\pi}{2}.$$

Допълнение на АФХ $W(j\omega)$ с дъги от окръжност с безкрайно голям радиус се извършва и при наличие на чисто имагинерни корени на $c(s)$, тъй като в този случай АФХ също има точка на прекъсване. Допълването се извършва с

полуокръжност по посока на часовниковата стрелка, започвайки от този клон на АФХ, който съответства на по-малките честоти ω фиг. 11.8.

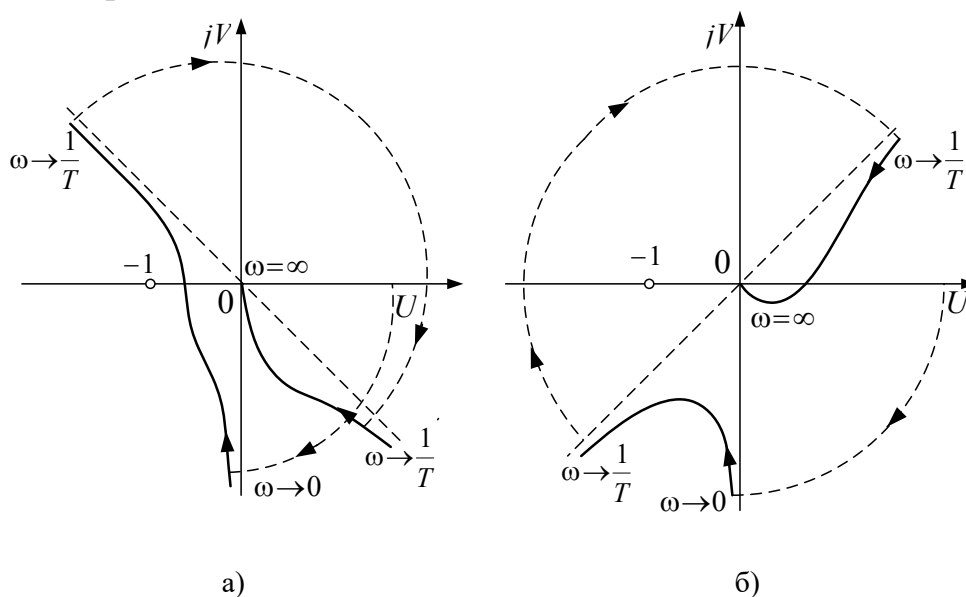


Фиг. 11.8 Ходографи на САР с нулеви корени, допълнени с дъги с бекрайно голям радиус

- а- с един нулев корен /астатична от 1 ред
- б- с два нулеви корена /астатична от 2 ред
- б- с три нулеви корена /астатична от 3 ред

Например ако $W(s) = \frac{b(s)}{c''(s)(1+T^2s^2)}$, то за $W(j\omega) = \frac{b(j\omega)}{c''(j\omega)(1-T^2\omega^2)}$ и АФЧХ

има точка на прекъсване при $\omega \rightarrow \frac{1}{T}$, тъй като при това $\text{mod } W(j\omega) \rightarrow \infty$ и $\arg W(j\omega) \rightarrow \infty$ прави скок на 180° .



Фиг. 11.9 АФЧХ на отворени системи, имащи двойка чисто имагинерни корени

- а- затворената система е устойчива
- б- затворената система е неустойчива

Понеже е конфликтен въпроса за броя на обиколките на $W(j\omega)$ около точката $(-1, 0)$ е удобно да се използва правилото на Никсън за определяне броя им, то гласи:

За да се определят броя на обиколките на АФХ около точката $(-1, j0)$ е необходимо да построим АФХ за честоти от $-\infty$ до $+\infty$ (т. е. построява се за реални честоти от 0 до ∞ и се прави огледалния образ спрямо реалната ос). След това се прекарва произволна права започваща от $(-1, j0)$ и пресичаща характеристиката (обикновено в неособено сложните ѝ части). Започва се обхождане на характеристиката от $-\infty$ до към 0^- през 0^+ до $+\infty$, като се отбелязват местата на пресичане на характеристиката с правата. Ако характеристиката е с прекъсване (например в т. 0) съединяваме 0^- и 0^+ (или $-\infty$ с $+\infty$) с безкрайно голяма окръжност по посока на часовниковата стрелка. Броя на обиколката се дава тогава от броя на пресичанията от ляво надясно минус броя на пресичанията от дясно наляво на правата с характеристиката. (Пресичанията на правата с безкрайно голяма окръжност също се броят).

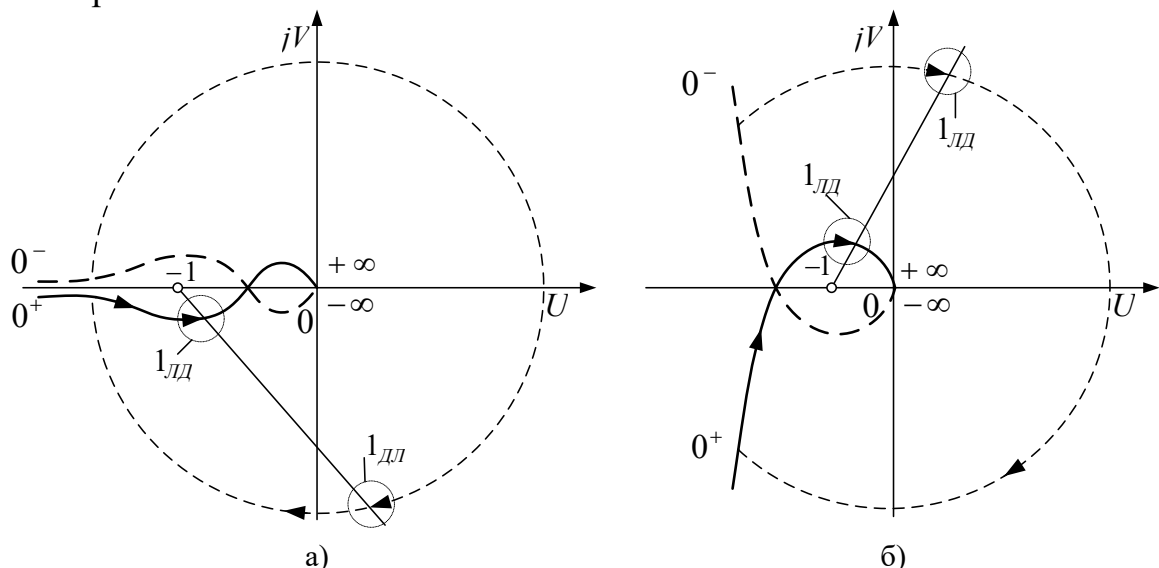
$$P = P_{\text{ЛД}} - P_{\text{ДЛ}}, \quad (11.28)$$

P - брой пресичания,

$P_{\text{ЛД}}$ - брой пресичания от ляво на дясно,

$P_{\text{ДЛ}}$ - брой пресичания от дясно на ляво.

На фиг. 11. 10 е показан пример за определяне устойчивостта, като се използва правилото на Никсън.



Фиг. 11.10 Приложение на правилото на Никсън за устойчива отворена система

а - $P = P_{\text{ЛД}} - P_{\text{ДЛ}} = 1_{\text{ЛД}} - 1_{\text{ДЛ}} = 0$ - броят на пресичанията е 0, т.е. затворената система е

устойчива

б - $P = P_{\text{ЛД}} - P_{\text{ДЛ}} = 2_{\text{ЛД}} - 0_{\text{ДЛ}} = 2$ - броят на пресичанията е 2, т.е. затворената система е

неустойчива

Лъжлива устойчивост. Критерият на Найквист важи при условие, че полиномите $a(s)$ и $c(s)$ нямат общи корени с положителна реална част. В обратен случай той води до погрешни резултати.

Ако се предположи, че $a(s)$ и $c(s)$ имат вид:

$$a(s) = a_1(s)(1 - T_1 s) \text{ и } c(s) = c_1(s)(1 - T_1 s) \quad (11.29)$$

АФХ е

$$W_1(j\omega) = \frac{a(j\omega)}{c(j\omega)} = \frac{a_1(j\omega)}{c_1(j\omega)} \quad (11.30)$$

Тъй като множителите $(1 - jT_1\omega)$ се съкращават, същата АФХ може да притежава и друга отворена система, за която

$$a(s) = a_1(s) \text{ и } c(s) = c_1(s) \quad (11.31)$$

На отворените системи (11.29) и (11.31) съответстват затворени системи с характеристично уравнение:

$$\begin{aligned} [a_1(s) + c_1(s)](1 - T_1 s) &= 0 \\ a_1(s) + c_1(s) &= 0 \end{aligned} \quad (11.32)$$

Предполага се, че втората система е устойчива. Първата според (11.32) е неустойчива, тъй като характеристичното ѝ уравнение има един положителен корен $s_1 = \frac{1}{T_1}$.

АФХ на двете системи са напълно еднакви. Следователно критерия на Найкуист се получава, че и двете системи са устойчиви. Това няма да важи за първата система. Подобни случаи се наричат в ТАР лъжлива устойчивост.

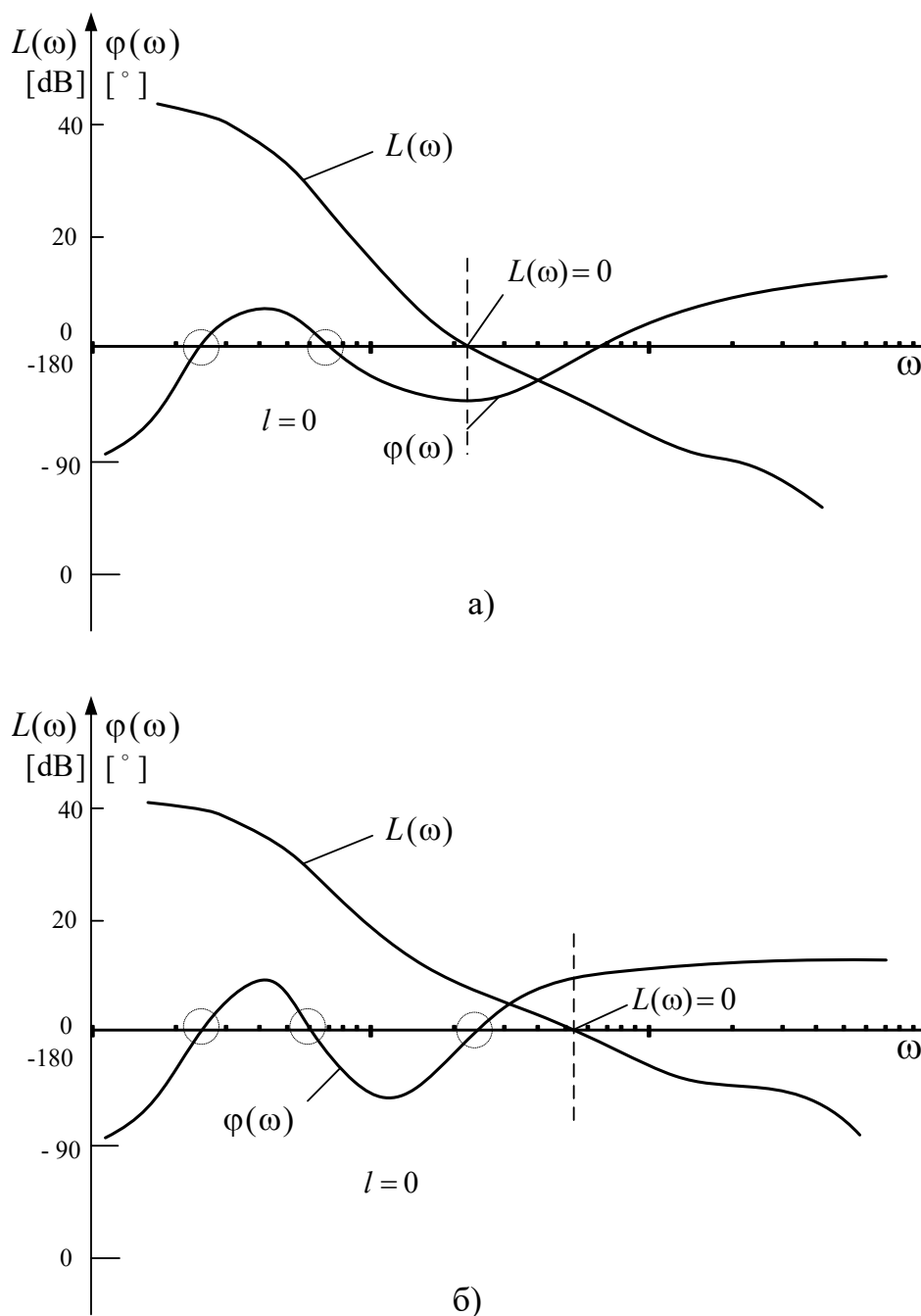
11.7. Критерий на Боде

Широко разпространение има критерия на Найквист в случаите когато се съди за устойчивост на системата по логаритмичните честотни характеристики (критерий на Боде). Възможността за такова разсъждение произтича от това, че АФЧХ на отворената система

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (11.33)$$

напълно се определя от двойката характеристики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, или аналогично

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \text{ и } \varphi(\omega).$$



Фиг. 11.11 Определяне устойчивостта по критерия на Боде

а – затворената система е устойчива / $l = 0$ /

б – затворената система е неустойчива / $l = 0$ /

Точката на пресичане на ходографа $W(j\omega)$ с отрязъка от отрицателната реална ос $(-\infty, -1)$ съответства на точки, за които $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| > 0$ и $\varphi(\omega) = \arg W(\omega) = -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$. Точките от логаритмичната фазова характеристика (ЛФХ) $\varphi(\omega)$ за които $L(\omega) > 0$ и които тя пресича при увеличение на ω правите $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$, от долу нагоре, се наричат *отрицателни преходи*, а от горе надолу – *положителни преходи* фиг. 11. 11. Тогава критерият за устойчивост може да се формулира така: САУ е устойчива,

ако броят на положителните и отрицателните преходи на ЛАЧХ е равна на $l/2$, където l - брой корени на характеристичното уравнение на затворена система, лежи в дясната полуплоскост. За случая, когато $l=0$ системата ще бъде устойчива, ако разликата между положителните и отрицателни преходи е равна на нула.

Системата се намира на границата на устойчивост, когато:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 0 \text{ при } \varphi(\omega) = -180^\circ. \quad (11.34)$$

Този израз може да се използва при аналитично определяне точките за които системата се намира на границата на устойчивост.

Това означава, че точката на пресичане на фазовата характеристика с линията -180° трябва да лежи надясно от точката на пресичане на амплитудната характеристика с абцисната ос $L(\omega) = 0$. Наляво от тази последна точка, може да има четно число пресичания на фазовата характеристика с линията -180° .

Пример 11.5: На фиг. 11.12 са построени логаритмичната амплитудна и фазова честотни характеристики за системата, с предавателна функция на отворена система:

$$W(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

където

$$K = 75 \text{ s}^{-1} \quad T_1 = 0.02 \text{ s} \quad T_2 = 0.005 \text{ s}$$

Трябва да се определи устойчивостта на затворената система по логаритмичните честотни характеристики на отворена система.

Решение. Устойчивостта на системата се определя по асимптотичните логаритмична амплитудна характеристика ЛАЧХ и логаритмична фазова характеристика. Честотите на промяна на наклона на асимптотичната логаритмична амплитудната характеристика са равни:

$$\omega_{cp1} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0.02} = 50 \text{ rad/s} \quad \omega_{cp2} = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0.005} = 200 \text{ rad/s}$$

Нискочестотната асимптота ЛАХ пресича честотната ос при честота

$$\omega_c = K = 75 \text{ s}^{-1}$$

По тези данни строим асимптотическата ЛАХ (фиг. 11.12). Фазовата честотна характеристика е равна:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)$$

където:

$$\varphi_1(\omega) = -90^\circ \quad \varphi_2(\omega) = -\arctg(\omega T_1) = -\arctg(0.02\omega)$$

$$\varphi_3(\omega) = -\arctg(T_2\omega) = -\arctg(0.005\omega)$$

ЛФХ се получава чрез графично събиране на функциите $\varphi_1(\omega)$; $\varphi_2(\omega)$; $\varphi_3(\omega)$

ЛФХ пресича линията $\varphi = -180^\circ$ при отрицателни стойности на асимптотичната ЛАХ. Следователно затворената система е устойчива.

В дадената задача ЛФХ е монотонна функция на честотата ω затова задачата може да се реши без построение на ЛФХ, като се използва аналитичното условие за устойчивост.

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1+T_1^2\omega^2} \sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

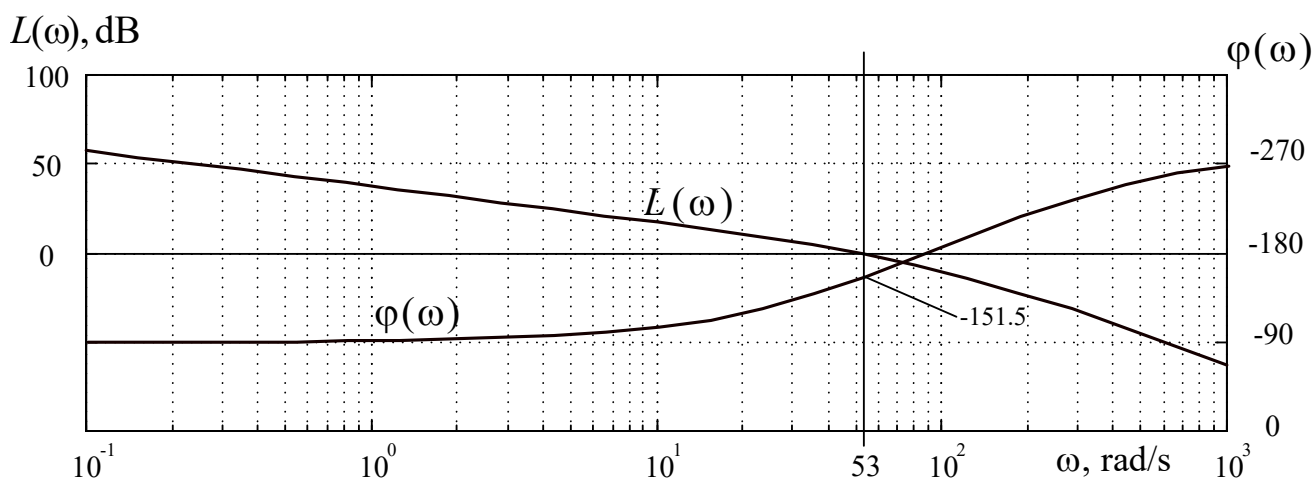
$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+T_1^2\omega^2} - 20\lg\sqrt{1+T_2^2\omega^2} = 0$$

След построяване на асимптотична ЛАХ определяме честотата на сръза на отворената система

$\omega = \omega_{cp} = 53 \text{ rad/s}$. Стойността на фазата при сръзващата честота е

$$\varphi(\omega_{cp}) = -90^\circ - \arctg(0.02 \times 50) - \arctg(0.005 \times 50) = -151.5^\circ > -180^\circ$$

Следователно затворената система е устойчива.



Фиг. 11.12 ЛАЧХ и ЛФЧХ към примера(

11.8. Критерии за качество

Устойчивостта на САУ е необходимо но недостатъчно условия за нейната практическа приложимост. Качеството на САУ се определя преди всичко от точността на управлението, тъй като всяка система независимо от предназначението си и конструкцията си трябва да осъществява управление на

някакъв обект или процес с определена точност. Следователно качеството на регулиране зависи от мигновената стойност на грешката $x(t)$.

$$x(t) = g(t) - y(t) \quad (11.35)$$

Грешката зависи от характера на изменението на задаващото и смущаващо въздействия. Обикновено задаващото $g(t)$ и смущаващото $f(t)$ въздействия представляват случайни функции на времето, които могат да бъдат зададени само чрез вероятностните си характеристики. Затова оценката на качеството на управление по мигновената стойност на грешката $x(t)$ не се използва.

В ТАРУ широко се използват методите позволяващи да се оценява качеството на системите по поведението им в типови режими, когато случаите по своята природа въздействия се апроксимират със зададени (типови) функции на времето.

Оценката на качеството на САУ се прави по така наречените *критерии* или *показатели на качеството*. В най-общия случай критериите на качеството η_i са функционали на грешката.

$$\eta_i = F_i[g(t) - y(t)] = F_i[x(t)] \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (11.36)$$

където:

F_i - функционали от приетите критерии на качеството (например оценка на точност по установената грешка, средно квадратична грешка и др.)

Критериите за качеството условно могат да се делят на четири групи.

- а) критерий за точност;
- б) запас на устойчивост;
- в) бързодействие на системата;
- г) комбинирани критерий

11.9. Критерий за точност

Критериите за точност се използват за оценка големината на грешката възникваща при различни типови режими и в случаите когато входното $g(t)$ и смущаващото $f(t)$ въздействия представляват плавни бавно изменящи се функции на времето. Към най-важните и най-широко разпространени типови въздействия се отнасят:

$$g(t) = g_0 1(t) \quad f(t) = f_0 1(t)$$

където - $g_0 = \text{const}$ и $f_0 = \text{const}$.

За следящите системи са важни режимите, когато

$$g(t) = \Omega_1(t) \quad \text{и} \quad g(t) = \varepsilon_1 \frac{t^2}{2} \quad \text{при} \quad f(t) = f_0 1(t)$$

където

$\Omega_1 = \text{const}$ - скорост на изменение на входната въздействие

$\varepsilon_1 = \text{const.}$ – ускорение на изменение на входната въздействие

Синусоидален режим от вида:

$$g(t) = g_{\max} \sin(\omega_g t)$$

Като критерий за точност на системата служи големината на установената грешка $x_{уст}$.

Запас на устойчивост.

Критериите за запас на устойчивост определят отдалечеността на системата от границата на устойчивост. Съществуват два подхода за оценка на качествата на системата по този критерий:

а) по преходните процеси на системата /преходна или тегловна функция, разположението на нулите и полюсите на предавателната функция на затворената система и др. като критерии за запаса от устойчивост служат големината на пререгулирането, брой колебания, затихване и колебателност на преходния процес.

б) по честотните и резонансни свойства на системата и по честотните ѝ характеристики. Като критерии за запаса от устойчивост се използват запасите от устойчивост по амплитуда и фаза, показател на колебателност и др.

Бързодействие на системата.

Временния и честотния подход се използват също и при оценката на бързодействие на системата. Критерий за бързодействие може да бъде времето за затихване на преходния процес или диапазона на пропускане на АЧХ на затворена система.

Понякога временните критерии за оценка на качеството на преходния процес се наричат *преки* в този смисъл, че с тяхна помощ се оценява непосредствено процеса на управление, възникващ при подаване на някое от типовите въздействия. Честотните критерии се наричат *косвени* тъй като оценката на процеса на управление се прави по изображението на този процес от временната в честотната област.

Комбиниранни критерии

Към комбинираните критерии се отнасят обобщените критерии характеризиращи едновременно точността, запаса на устойчивост и бързодействието – интегрални оценки.

Строга връзка между честотните и временни критерии за качество в общ вид може да бъде получена само за най-простите диференциални уравнения от II ред. В много случаи обаче, при оценка на качеството може да се ограничим само с честотните критерии. В някои случаи изчисленията в честотната област са по-достъпни от тези във временната, което ги прави предпочитани при определяне критериите за качество на системите.

Към най-важните показатели за качество на САУ могат да бъдат отнесени и показателите стойност на системата, икономическа ефективност на

управлението, разход на енергия, надеждност, чувствителност към вариацията на параметрите и др.

11.10. Точност при типови въздействия

Точността на работа на САУ се определя от големината на установената грешка.

$$x_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t), \quad (11.37)$$

при типови входни и смущаващи въздействия. Колкото по-малка е стойността на грешката, толкова по-добро е качеството на САУ.

Грешката $x(t)$ се определя от диференциалното уравнение на САУ по грешката:

$$a(s)x(t) = c(s)g(t) - \sum_{k=1}^n r_k(s)f_k(t) \quad (11.38)$$

За установен режим всички производни в диференциалното уравнение се обръщат в нули. Замествайки $p = \frac{d}{dt}$ равно на нула, се получава уравнението на установения режим.

Установената грешка може да бъде определена и от предавателната функция на системата. Като се преобразува по Лаплас уравнение (11.38) при нулеви начални условия се получава:

$$X(s) = \Phi_x(s)G(s) - \sum_{k=1}^n \Phi_{f_k}(s)F_k(s) \quad (11.39)$$

където:

$$\Phi_x(s) = \frac{c(s)}{a(s)} = \frac{1}{1+W(s)} \quad \text{- предавателна функция на затворена система по}$$

грешката.

$$\Phi_{f_k}(s) = \frac{r_k(s)}{a(s)} = \frac{W_{f_k}(s)}{1+W(s)} \quad \text{- предавателна функция на затворена}$$

система по смущение.

Установената грешка може да се определи по теоремата за крайните значения

$$x_{уст} = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s) \quad (11.40)$$

Като се замести (11.40) в (11.39) се получава:

$$x_{уст} = x_g + x_f \quad (11.41)$$

където:

$x_g = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{G(s)}{1+W(s)} \right]$ - съставляваща на установената грешка от възпроизвеждане на заданието $g(t)$ и

$x_f = \lim_{s \rightarrow 0} s \sum_{k=1}^N \left[\frac{W_{fk}(s)}{1+W(s)} F_k(s) \right]$ - съставляваща на установената грешка от действието на смущенията $f_k(t)$.

Разгледа се определението на установената грешка при различни типови въздействия.

1. Постоянно степенчато въздействие $g(t) = g_0 1(t)$. Приемаме, че на системата действа едно постоянно степенчато смущение $f_k(t) = f_0 1(t)$; $g_0 = const$; $f_0 = const$. Установената грешка получена в резултат на тези въздействия се нарича статична $x_{cm}(t)$.

$$x_{ycm} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[\frac{\frac{g}{s}}{1+W(s)} \right] + \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{W_f(s) \frac{f_0}{s}}{1+W(s)} \right] = x_{g, cm} + x_{f, cm} \quad (11.42)$$

При статични системи $W(0) = K$ - общ коефициент на усилване на отворената система и тогава:

$$x_{gcm} = \frac{g_0}{1+W(0)} = \frac{g_0}{1+K} \quad (11.43)$$

При настройване на статичните системи първата съставляваща на грешката може да се отстрани като се използват неединична обратна връзка или мащабиране на входния сигнал. Тази съставляваща е равна на нула също в системите за автоматична стабилизация, за които $g_0 = 0$ и в системи, астатични по отношение на входното въздействие, тъй като при това $W(0) = \infty$.

За системи статични по отношение на смущението, второто събираемо е:

$$x_{fcm} = \frac{W_f(0)}{1+K} f_0 \quad (11.44)$$

$W_f(0)$ - отношение на установената грешка към постоянното смущение (коефициент на статизма), за системи с отворена верига на управлението. Тази величина разделена на $(1+K)$. Съответства на коефициента на статизма в затворената система.

Величината $(1+K)$ показва ефективността на управление от гледна точка на намаляване на установената грешка.

За системи астатични по отношение на входното въздействие и $W(0) = \infty$; $x_{gcm} = 0$, но това не значи, че астатизма на системата се запазва и по отношение

на смущението т. е. x_f ще зависи от вида на предавателната функция на отворена система по смущение $W_f(s)$.

2. Въздействие във вид на линейна функция. (движение с постоянна скорост).

$$g(t) = \Omega_1 t \quad \Omega_1 = const$$

Приемаме смущението за степенчато $f(t) = f_0 1(t)$

Такъв режим се прилага главно при следящите системи и съответства на движение на командната ос с постоянна скорост. За установената грешка се написва:

$$x_{ycm} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{\frac{\Omega_1}{s^2}}{1 + W(s)} \right] + \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{W_f(s) \frac{f_0}{s}}{1 + W(s)} \right] = x_{g, ck} + x_{f, cm} \quad (11.45)$$

Второто събираемо представлява съставляващата на установената грешка от смущението. Първото събиране има смисъл само за системи с астатизъм от I ред по отношение на входното въздействие, т.е. при предавателна функция на отворена система от вида.

$$W(s) = \frac{K_1}{s} \frac{(B_0 s + B_1 s^{m-1} + \dots + B_{m-1} s + 1)}{(C_0 s + C_1 s^{n-1} + \dots + C_{n-2} s + 1)}$$

Тази съставляваща на установената грешка се нарича *скоростна*

$$x_{gck} = \frac{\Omega_1}{K_1} \quad (11.46)$$

където:

K_1 - коефициент на усилване на отворената система по скорост.

Колкото коефициента K_1 е по-голям, толкова е по-добро качеството на системата.

При астатични системи от ред по-висок от I-ви $x_{gck} = 0$, а за статични системи $x_{gck} = \infty$.

3. Въздействие във вид на квадратна функция (движение с постоянно ускорение)

$$g(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \varepsilon = const$$

Както по-горе приемаме смущението $f_k(t) = f_0 1(t)$

Този режим има смисъл само в следващите системи и системите с програмно управление. Аналогично за x_{ycm} получаваме:

$$x_{ycm} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{\frac{\varepsilon}{s^3}}{1 + W(s)} \right] + \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{W_f(s) \frac{f_0}{s}}{1 + W(s)} \right] = x_{g, yck} + x_{f, cm} \quad (11.47)$$

Първото събираемо има смисъл при астатизъм от II ред по отношение на входното въздействие, т.е. когато предавателната функция има вид:

$$W(s) = \frac{K_2}{s^2} \frac{(B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_{m-1} s + 1)}{(C_0 s^{n-2} + C_1 s^{n-3} + \dots + C_{n-3} s + 1)}$$

Тази съставляваща на установената грешка, се нарича грешка от ускорението

$$x_{g, yck} = \frac{\varepsilon}{K_2} \quad (11.48)$$

Втората съставляваща на грешката се определя аналогично на първите два случая.

4. Хармонично (синусоидално) входно въздействие. Този режим се използва твърде често, защото той позволява най-пълно да се установи динамичната точност на САР.

За него:

$$g(t) = g_{\max} \sin \omega_g t$$

За простота в разсъжденията се приема, че смущаващото въздействие е степенчато изменящо се $f_k(t) = f_0 1(t)$, и няма да разглеждаме грешката получена от него, а само грешката от заданието $g(t)$

$$X(s) = \frac{G(s)}{1 + W(s)} \quad (11.49)$$

Очевидно е, че в установен режим също ще се измени по хармоничен закон с честота ω_g . Максималната стойност на грешката се определя от (11.49), като се замести $s = j\omega_g$

$$x_{\max} = \frac{g_{\max}}{|1 + W(j\omega_g)|} \quad (11.50)$$

Обикновено $g_{\max} \gg x_{\max}$, което дава основание да се напише

$$x_{\max} = \frac{g_{\max}}{|W(j\omega_g)|} = \frac{g_{\max}}{A(\omega_g)} \quad (11.51)$$

където:

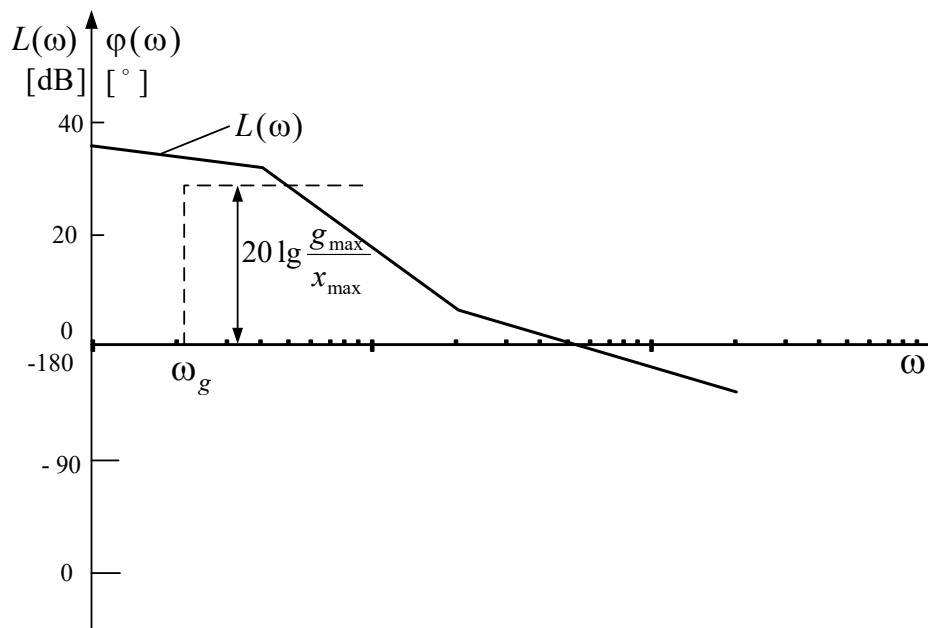
$A(\omega_g)$ - стойност на АЧХ на отворената система за честота ω_g . От тук произтичат изискванията към АЧХ на отворената система, при която се осигурява нужната точност на управление.

$$A(\omega_g) \geq \frac{g_{\max}}{x_{\max}} \quad (11.52)$$

или

$$L(\omega_g) = 20 \lg A(\omega_g) \geq 20 \lg \left(\frac{g_{\max}}{x_{\max}} \right) \quad (11.53)$$

От уравнение (11.53) произтича ограничението за местоположението на ЛАЧХ за да се изпълнят изискванията за точност – фиг. 11.13.



Фиг. 11.13 Ограничение на местоположението на ЛАЧХ, свързано с изискването за точност на управлението

- Бавно изменящи се въздействия с произволна форма. Ако външните въздействия $g(t)$ и $f(t)$ имат произволна, но достатъчно плавна форма, т.е. след началото на прилагането им съществено значение имат само крайно число m производни

$$\frac{df}{dt}, \frac{d^2 f}{dt^2}, \dots, \frac{d^m f}{dt^m}, \text{ или } \frac{dg}{dt}, \frac{d^2 g}{dt^2}, \dots, \frac{d^m g}{dt^m} \quad (11.54)$$

то, съставляващите на установената грешка от $f(t)$ или $g(t)$ се определят по следния начин. Разлага се предавателната функция на затворената система по грешката в ред по нарастващите степени на s .

$$\Phi_x(s) = \frac{c(s)}{a(s)} = \gamma_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 \frac{s^2}{2!} + \gamma_3 \frac{s^3}{3!} + \dots \quad (11.55)$$

или

$$\Phi_f^x = \frac{-r(s)}{a(s)} = \gamma'_0 + \gamma'_1 s + \gamma'_2 \frac{s^2}{2!} + \gamma'_3 \frac{s^3}{3!} + \dots \quad (11.56)$$

Тези редове са сходящи при малки стойности на s , т. е. при достатъчно големи стойности на t , което съответства на установения режим. Като се има в предвид (11.54) се получава за установената грешка.

$$x_{g,ycm} = \gamma_0 g(t) + \gamma_1 \frac{dg}{dt} + \frac{\gamma_2}{2!} \frac{d^2 g}{dt^2} + \dots + \frac{\gamma_m}{m!} \frac{d^m g}{dt^m}, \quad (11.57)$$

и

$$x_{f,ycm} = \gamma'_0 f(t) + \gamma'_1 \frac{df}{dt} + \frac{\gamma'_2}{2!} \frac{d^2 f}{dt^2} + \dots + \frac{\gamma'_m}{m!} \frac{d^m f}{dt^m}, \quad (11.58)$$

където:

$$\gamma_0 = \Phi_x(s) \Big|_{s=0}; \gamma_1 = \frac{d\Phi_x(s)}{ds} \Big|_{s=0} \quad \gamma_m = \frac{d^m \Phi_x(s)}{ds^m} \Big|_{s=0}, \quad (11.59)$$

$$\gamma'_0 = \Phi_f^x(s) \Big|_{s=0}; \gamma'_1 = \frac{d\Phi_f^x(s)}{ds} \Big|_{s=0} \quad \gamma'_m = \frac{d^m \Phi_f^x(s)}{ds^m} \Big|_{s=0}. \quad (11.60)$$

За определяне коефициента на грешката може да не се използват горните формули, а да се разделят почленно числителя на съответната предавателна функция на знаменателя ѝ.

Пример 11.7: Предавателна функция на отворена следяща система (фиг.) има вид:

$$W(s) = \frac{k}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

Да се определят първите три коефициента на грешката, а също така коефициента на системата по скорост.

Решение. Намира се предавателната функция на системата по грешката.

$$\Phi_x(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)+k} = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k}$$

Разлага се този израз в ред посредством деление полинома на числителя на полинома на знаменателя

$$\begin{array}{r|l} s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2 s^3 & \frac{k + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1T_2s^3}{\frac{1}{k}s + \frac{1}{k}\left(T_1 + T_2 \frac{1}{k}\right)s^2 \dots\dots} \\ - & \\ s + \frac{1}{k}s^2 + \frac{T_1 + T_2}{k}s^3 + \frac{T_1T_2}{k}s^4 & \\ \hline \left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k}\right)s^2 + \left(T_1T_2 - \frac{T_1 + T_2}{k}\right)s^3 - \frac{T_1T_2}{k}s^4 & \end{array}$$

По-нататък можем да напишем тъждеството

$$C_0 + C_1s + \frac{C_2}{2}s^2 + \dots = \frac{1}{k}s + \frac{1}{k}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k}\right)s^2 + \dots$$

От тук получаваме коефициентите на грешката

$$C_0 = 0 \quad C_1 = \frac{1}{k} [s] \quad \frac{C_2}{2} = \frac{1}{k}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k}\right) [s^2].$$

Коефициент на системата по скорост има стойност:

$$k_D = \frac{1}{C_1} = k [s^{-1}]$$

Поради това, че коефициента на усилване k се намира в знаменател, а времеконстантите в числителя, може да се направи извод, че всички грешки се намаляват с увеличаване на k и с намаляване на времеконстантите, които характеризират инерционността на системата.

Ако се приеме, че задаващото въздействие е от вида

$$g(t) = g_o + V_0t + \frac{at^2}{2},$$

тогава

$$\frac{dg(t)}{dt} = V_0 + at \quad \frac{d^2g(t)}{dt^2} = a.$$

Според уравнение (11.57) с определени коефициенти се получава:

$$x_{g,ycm} = \frac{1}{k}\left[V_0 + at + a(T_1 + T_2) - \frac{a}{k}\right].$$

В заключение може да се отбележи, че при произволно външно въздействие във уравненията за грешките общия коефициент на усилване на отворената система води до намаляване на всички видове установени грешки на

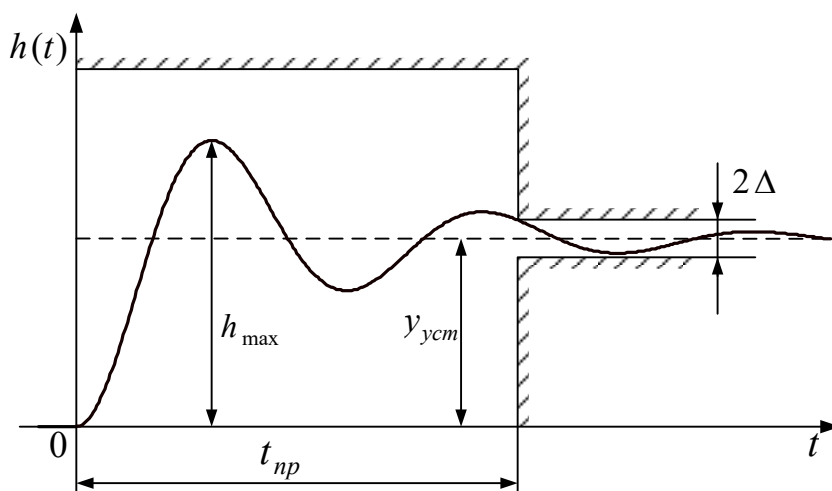
затворената система. Това е главния фактор за повишаване точността на затворената система.

Изчисляването на установените грешки по указаните формули има практически смисъл само при достатъчно бавно изменящи се външни въздействие. Иначе тази грешка няма да е реална заради наличието на значителна преходна съставляваща на процеса.

11.11. Оценка на запаса от устойчивост и бързодействие по преходната характеристика

Оценка на запаса на устойчивост и бързодействие може да се направи по вида на преходния процес на системата при някое типово въздействие, което може да бъде както задаващо, така и смуцаващо. Обикновено се разглежда преходния процес при въздействие на единична степенчата функция, т. е. преходната функция на затворената система. Използват се *преките показатели за качеството*

- Пререгулиране;
- Допустим брой на колебанията;
- Време за преходния процес.



Фиг. 11.14. Преходна характеристика на САУ

Запасът на устойчивост се определя от отдалечеността на САУ от колебателната граница на устойчивост и се характеризира от *пререгулирането* σ - фиг. 11.14.

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{ycm}}{h_{ycm}} 100\% \quad (11.61)$$

където $h_{\max}$, y_{ycm} - съответно максимална и установена стойност на преходната функция.

За повечето системи запаса от устойчивост се отчита за достатъчен, ако $\sigma \leq (10 \div 30)\%$. В някои системи, обаче може да се допусне пререгулиране до 70%, а в много случаи пререгулиране, въобще не се допуска.

Понякога допълнително към пререгулирането σ се задава допустимия брой колебания. В някои системи, допустимия брой колебания е 2-3, а в други колебания изобщо не се допускат.

Времето за преходния процес t_{np} определя бързодействието на системата. Това е времето при изтичане на което се изпълнява неравенството.

$$|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta \quad (11.62)$$

където: Δ - предварително зададеното положително число. Обикновено се приема $\Delta = (0.01 \div 0.05)h_{уст}$, т. е. преходния процес в САУ се счита за завършен, когато преходната функция $h(t)$ се различава от установената си стойност $h_{уст}$ не повече от 1-5%.

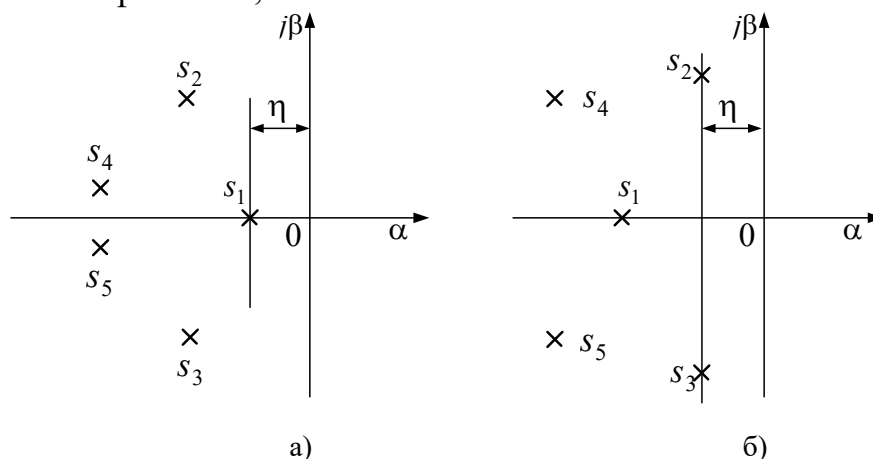
Допустимото време за преходния процес се определя въз основа на опита при експлоатация на системите за регулиране. Оценката на качеството на САУ по преходния процес притежава голяма нагледност и позволява лесно да се формира областта на допустимите процеси – фиг. 11.14.

11.12 Оценка на запаса от устойчивост и бързодействие по разположение на корените на характеристичното уравнение.

1. Степен на устойчивост, затихване и колебателност.

Най-разпространен и елементарен от методите за оценка на запаса на устойчивост по корените на характеристичното уравнение е метода за оценка на разстоянието до имагинерната ос на най-близкия до нея корен. Това разстояние се нарича *степен на устойчивост*.

Степента на устойчивост се нарича *апериодична* ако най-близкия до имагинерната ос корен е реален фиг. 11.15, а и *колебателна*, ако най-близкия корен е комплексен фиг. 11.5, б.



Фиг. 11. 15 Определяне на степента на устойчивост

а – апериодична степен на устойчивост

б- колебателна степен на устойчивост

Корените на характеристичната уравнение, разположени най-близо до имагинерната ос, т. е. имащи най-малка по абсолютна стойност реална част, дават в преходния процес членове, които затихват най-бавно. В повечето случаи преходния процес може да се счита за завършен, тогава когато затихва члена, определен от най-близкия до имагинерната част корен.

Ако степента на устойчивост е аperiодична, най-близкия до имагинерната ос корен е реален - η , то в преходния процес доминира експонентата, характеризирана от този корен $y = C_{\eta} e^{-\eta t}$.

Полага се в края на преходния процес $y(t_{np}) = \Delta C_{\eta}$ и при $\Delta = 0.05$ бързината на затихване на преходния процес се определя от тази експонента, по израза:

$$t_{np} \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0.05} \approx \frac{3}{\eta}. \quad (11.63)$$

Ако степента на устойчивост е колебателна, то най-близки до имагинерната ос са двойка комплексно спрегнати корени $(-\eta \pm j\beta)$, то в общи черти преходния процес се характеризира от затихваща синусоида обвиващата на която има уравнение

$$y = C_{\eta} e^{-\eta t} \sin(\beta t + \psi). \quad (11.64)$$

Оценката на времето за преходния процес се определя също от (11.63). По същество степента на устойчивост η е и мярка за бързина на затихване на преходния процес и може да се нарече още *степен на бързодействие*.

Степента на устойчивост може да се изчисли и без да се намират корените на характеристичните уравнения. Нека е дадено характеристичното уравнение на затворената система.

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (11.65)$$

Ако транслираме имагинерната ос наляво, така, че тя да мине през най-близкия до нея корен получаваме.

$$a_0(z - \eta)^n + a_1(z - \eta)^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (11.66)$$

където: $s = z - \eta$.

При разкриване на скобите и групиране на членовете се намира,

$$a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} \dots + A_n = 0, \quad (11.67)$$

където:

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} \left[\frac{d^{n-k} a(s)}{ds^{n-k}} \right]_{s=-\eta}; \quad A_1 = \left[\frac{da(s)}{ds} \right]_{s=-\eta}; \quad (11.68)$$

За да се определи степента на устойчивост трябва да приложим към уравнение (11.66) някои от критериите за устойчивост и да определим при

какви стойности на η се получава границата на устойчивост. Според критерия на Хурвиц, за апериодична граница на устойчивост е равенства на нула на свободния член на характеристичното уравнение:

$$A_n = a_n - a_{n-1}\eta + a_{n-2}\eta^2 - a_{n-3}\eta^3 \dots = 0 \quad (11.69)$$

Колебателната граница на устойчивост съответства на равенство на нула на предпоследната детерминанта на Хурвиц или преминаване на кривата на Михайлов през началото на координатната система, или по критерия на Накуст преминаване на АФЧХ през точката $(-1, j0)$.

В случаите, когато най-близките до имагинерната ос корени са комплексно спрегнати $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ оценката на запаса на устойчивост може да се направи по затихването за един период ξ .

Предполага се че преходния процес достатъчно точно се описва от израза:

$$y(t) = C e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \theta). \quad (11.70)$$

След време t_1 амплитудата на процеса ще бъде

$$y(t_1) = C e^{-\alpha t_1}, \quad (11.71)$$

а след един период $T = \frac{2\pi}{\beta}$ амплитудата ще е:

$$y(t_1 + T) = C e^{-\alpha\left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = x(t_1) e^{-2\pi\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (11.72)$$

Под *затихване за един период* ще разбираме величината

$$\xi = \frac{y(t_1) - y(t_1 + T)}{y(t_1)} = 1 - e^{-2\pi\frac{\alpha}{\beta}} \quad (11.73)$$

При $\xi = 0$ липсва затихване, т.е. системата се намира на колебателната граница на устойчивост. Колко по-голяма е стойността на ξ , толкова по-бързо затихват колебанията и толкова по-голям е запасът от устойчивост на системата. При $\xi = 90 \div 98\%$ колебанията затихват практически за един период.

Склонността на системата към колебания може да се оцени и по тъй наречената степен на колебателност.

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} \quad (11.74)$$

Връзката между ξ и μ се получава лесно замествайки (11.74) в (11.73)

$$\xi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$$

или

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\xi}}. \quad (11.75)$$

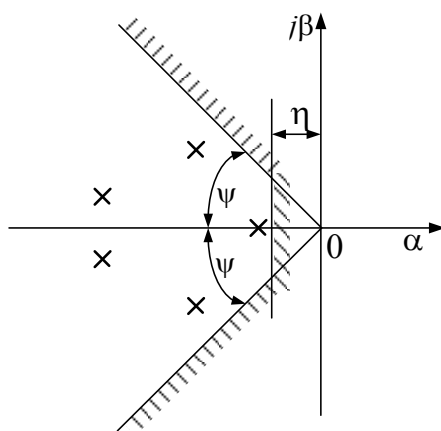
Следва, че затихването ξ и колебателността са свързани еднозначно, т.е. колкото по-малко е μ , толкова е по-голямо ξ и степента на устойчивост на САУ.

Заданието за определена колебателност ограничава областта на разположение на корените с два лъча, които сключват ъгъл с реалната ос

$$\psi = \arctg(\mu) = \arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (11.75)$$

При задаване на стойностите на колебателността и степента на устойчивост, областта на разположение на корените се ограничава също и от вертикална права, успоредна на имагинерната ос на разстояние η - фиг.11.16. за да се удовлетворяват изискванията към САУ като по бързодействие, така и по запас от устойчивост, всички корени на характеристичното уравнение на затворената система трябва да се разполагат вътре в зададената област.

Методите на корените дават само приблизителна оценка за качеството на САУ, защото при такъв подход не се отчита дясната част на уравнението на затворената система.



Фиг.11.16 Област на разпределение на корените

Пример 11.8: Дадена е предавателната функция на отворената система с астатизъм от I ред.

$$W(s) = \frac{k_{\Omega}}{s(1+Ts)}$$

Трябва да се определи съотношението между скоростния коефициент k_{Ω} и времеконстантата T , при затихването за един период ще бъде по-малко от зададената стойност η .

Решение:

Намира се характеристичното уравнение на системата.

$$1 + W(s) = 0,$$

или,

$$s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{k_{\Omega}}{T} = 0.$$

Корените на това уравнение са

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm \sqrt{\frac{k_{\Omega}}{T} - \frac{1}{4T^2}} = -\alpha \pm j\beta,$$

където $\alpha = \frac{1}{2T}$; $\beta = \sqrt{\frac{k_{\Omega}}{T} - \frac{1}{4T^2}}$.

Колебателността е свързана със затихването за един период чрез зависимостта

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\eta}}$$

Намира се

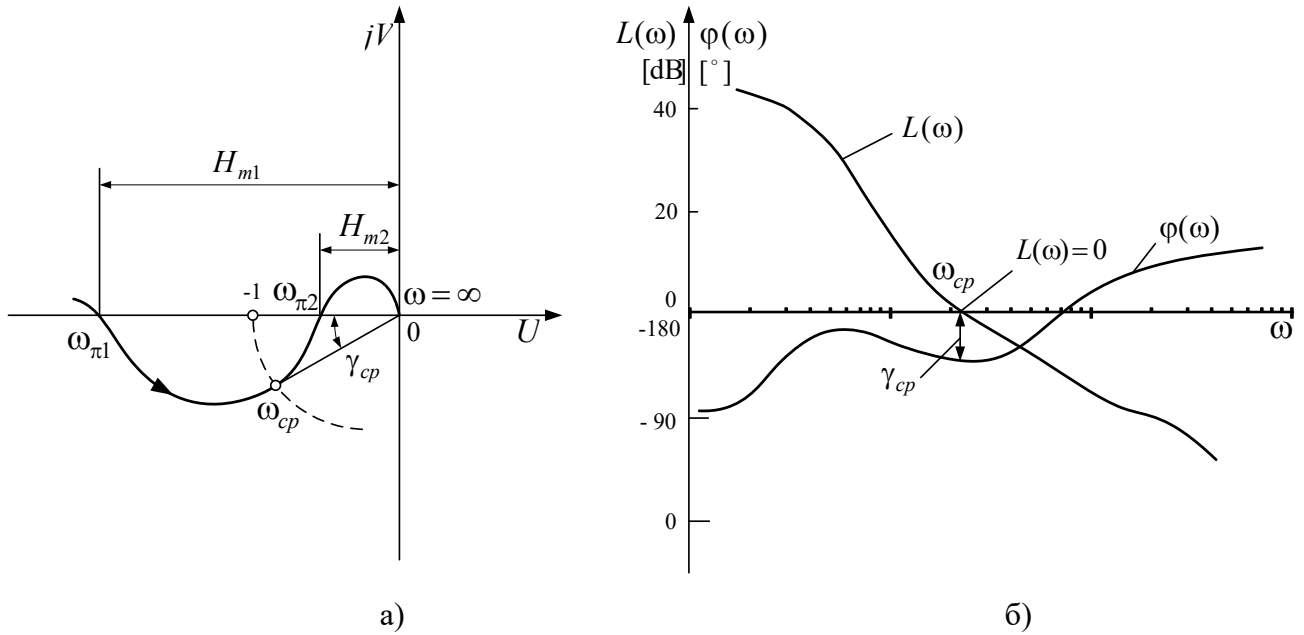
$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{4k_{\Omega}T - 1}$$

Съвместното решаване дава исканата връзка

$$k_{\Omega}T \ll \frac{\pi^2}{\left(\ln \frac{1}{1-\eta}\right)^2} + 0,25$$

11.12. Оценка на запаса на устойчивост и бързодействие по честотни показатели на качеството

Честотните показатели на качество не разглеждат вида на преходния процес, а се базират на някои честотни свойства на системите. Те са най-добре разработени по отношение оценката на запаса от устойчивост. Запасът от устойчивост на затворената система може да се определя по отдалечеността на АФХ на отворената система от т. $(-1, j0)$, (фиг. 11.17). Преминаването на АФК пред тази точка съответства на колебателната граница на устойчивост на САР. Отдалечаването на АФЧХ от т. $(-1, j0)$ съответства на повишаване на запаса от устойчивост. Въвеждат се понятията *запас от устойчивост по амплитудата* и *запас от устойчивост по фаза*.



Фиг. 11.17 Определяне на запаса от устойчивост по амплитуда H_m и по фаза γ_{cp}

Разглеждат се количествените оценки за степента на отдалечаване на АФЧХ $W(j\omega)$ от точката $(-1, j0)$. Отдалечеността може да се характеризира с две положителни числа H_m и γ_{cp} , наречени запас на устойчивост на САУ по амплитуда и по фаза.

Запасът от устойчивост по амплитуда H_m показва с каква стойност трябва да се измени модула на АФХ на отворената система за честота при която ФЧХ има стойност -180° , т.е. $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega_\pi) = -180^\circ$, за да се окаже затворена САУ на колебателната граница на устойчивост.

$$H_{m1} = \text{mod } 20 \lg A(\omega_{\pi1}) \Big|_{\varphi(\omega_{\pi1}) = -180^\circ}, \quad (11.76)$$

$$H_{m2} = \text{mod } 20 \lg A(\omega_{\pi2}) \Big|_{\varphi(\omega_{\pi2}) = -180^\circ}. \quad (11.77)$$

Запасът от устойчивост по фаза γ_{cp} показва с каква стойност трябва да се увеличи изоставането по фаза на отворената система за честота при която АЧХ е равна на единица, т.е. $A(\omega_{cp}) = 1$, за да се окаже затворена система на колебателната граница на устойчивост.

$$\gamma_{cp} = 180^\circ + \psi(\omega_{cp}) \Big|_{A(\omega_{cp}) = 1} \quad (11.78)$$

Запасът от устойчивост се счита за достатъчен ако

$$H_m \geq 6 \text{ dB} \quad \gamma_{cp} \geq 30^\circ \quad (11.79)$$

Оценката на запаса от устойчивост и бързодействие може да се направи и по амплитудно честотната характеристика на затворената система. Ако АФХ на затворената система се представи във вида

$$\Phi(j\omega) = H(\omega) e^{j\theta(\omega)}, \quad (11.80)$$

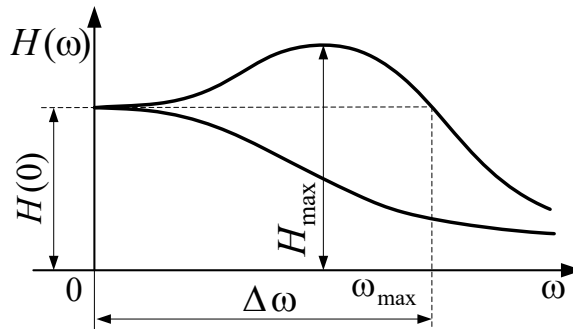
от АЧХ ще се определи като

$$H(\omega) = |\Phi(j\omega)| = | |. \quad (11.81)$$

а, ФЧХ от

$$\theta(\omega) = \arg \Phi(j\omega) = \arg \left(\frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} \right) \quad (11.82)$$

Възможните очертания на АЧХ на затворената система са показани на фиг. 11.18



Фиг. 11.18. Възможните очертания на АЧХ на затворената система

За повечето от САР характеристиката $H(\omega)$ има резонансен пик $H_{\max}$. В много случаи обаче, $H(\omega)$ няма пик и е ненарастваща функция на честотата. За САУ намираща се на колебателната граница на устойчивост $H(\omega)$ е прекъсната. Следва, че за да бъде САУ отдалечена достатъчно от границата на устойчивост, големината на $H_{\max}$ трябва да е запасът от устойчивост и обратно. Прието е запасът от устойчивост да се оценява по така наречения показател на колебателност M под който се разбира най-голямата стойност на отношението.

$$M = \sup \left[\frac{H(\omega)}{H(0)} \right] \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (11.83)$$

За САУ с изразен максимум

$$M = \frac{H_{\max}}{H(0)}, \quad (11.84)$$

а за ненарастващи функции $H(\omega)$

$$M = \frac{H(0)}{H(0)} = 1. \quad (11.85)$$

За колебателната граница на устойчивост

$$M = \infty. \quad (11.86)$$

За статистичните САУ началната ордината

$$H(0) = |\Phi(0)| = \frac{K}{K+1}, \quad (11.87)$$

а за астатичните $H(0) = 1$. Очевидно е, че при астатичните САУ показателя на колебателност се определя от:

$$M = \sup H(\omega) \quad 0 \leq \omega < \infty, \quad (11.88)$$

или

$$M = H_{\max}. \quad (11.89)$$

Обикновено запасът от устойчивост се счита за достатъчен ако

$$1.1 \leq M \leq 1.8. \quad (11.90)$$

За оценка на степента на отдалеченост на АФХ на отворената система от точката $(-1, j0)$ може да се използва и показателят на колебателност M . Записва се АФХ на отворената система и се определя

$$W(j\omega) = U + jV \quad (11.91)$$

където: U - реална; V - имагинерна съставляваща.

От АФХ на затворената система се определя

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = \frac{(U + jV)}{(1 + U + jV)}, \quad (11.92)$$

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{U^2 + V^2}{(1 + U)^2 + V^2}}. \quad (11.93)$$

За всяка стойност на $H(\omega) = H = \text{const}$ формула (11.93) определя в неявен вид крива в координатна система U, jV . Геометрично тази срива представлява геометрично място на възможните значения на U и V , при които АЧХ на затворената система имат постоянна стойност на H . За да се намери уравнението на фамилията криви $H = \text{const}$ се повдига на квадрат (11.93) и се прибавя и изважда към него израза $\frac{H^4}{(H^2 - 1)^2}$,

Получава се:

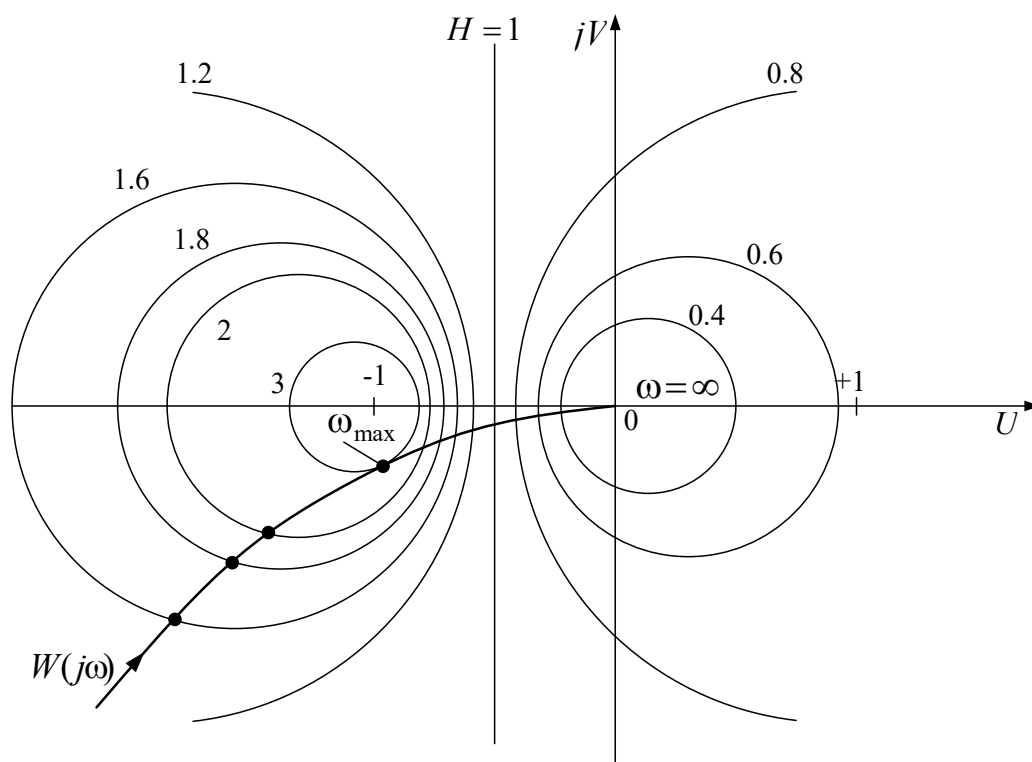
$$(U + C)^2 + V^2 = R^2, \quad (11.94)$$

където:

$$C = \frac{H^2}{H^2 - 1} \quad R = \frac{H^2}{H^2 - 1}.$$

Уравнението (11.94) представлява уравнение на окръжност с радиус R и център C . При $H=1$, $C=R=\infty$ и окръжността се изразжда в права успоредна на ординатната ос и минаваща на разстояние 0.5 в ляво от нея. Окръжностите съответстващи на $H > 1$ се разполагат в ляво, а на $H < 1$ в дясно от правата на $H=1$. При $H \rightarrow \infty$ окръжността се изразжда в точката съвпадаща с т. $(-1, j0)$.

При семейство окръжности $H = \text{const}$ и АФХ на отворена система не е трудно да се построи АЧХ $H(\omega)$ на затворената система. За всяка стойност на честотата ω на АФЧХ $W(j\omega)$ амплитудната характеристика $H(\omega)$ е равня на индекса на тази окръжност $H = \text{const}$, която преминава през точката на АФЧХ съответстваща на разглежданата к.стойност на ω . Най-голямата стойност на $H(\omega)$, $H_{\max}$ е равна на индекса на тази окръжност $H = \text{const}$ до която се допира АФХ на отворената система $W(j\omega)$. По стойността на $H_{\max}$ лесно се определя показателя на колебателност M . Така, за астатични системи имащи резонансен връх $M = H_{\max}$, т.е. показателя на колебателност е равен на индекса на тази линия $H = \text{const}$, която се допира до АФЧХ. Затова при тях понякога $H = \text{const}$ често се наричат линии с постоянно значение на показателя на колебателност M и се индексират с $M = \text{const}$.



Фиг. 11.19. Семейство окръжности $H = \text{const}$ и АФЧХ на отворена система

При астатичните системи стойността на показателя на колебателност не превишава зададената стойност на M , ако АФХ на отворената система не преминава през забранената зона представляваща кръг с радиус $R = \frac{M}{M^2 - 1}$ с

център в т. $C = \frac{M^2}{M^2 - 1}$ на отрицателната реална ос. Забранената зона обхваща точка $(-1, j 0)$ и осигурява получаването на необходимия запас от устойчивост – фиг.11.20.

От ΔOBD определяме връзката между амплитудата A и запаса от фаза γ при произволно положение на точката B върху окръжността.

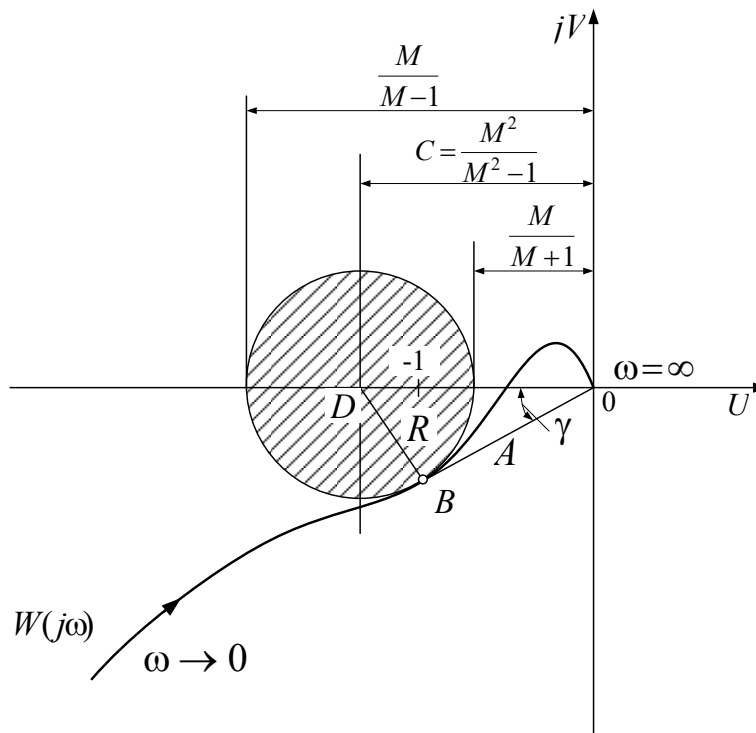
$$\cos \gamma = \frac{A^2 + C^2 - R^2}{2AC}. \quad (11.95)$$

Тъй като

$$C^2 - R^2 = \left(\frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 - \left(\frac{M}{M^2 - 1} \right)^2 = \frac{M^2}{M^2 - 1} = C,$$

то

$$\gamma = \arccos \frac{A^2 + C}{2AC}. \quad (11.96)$$



Фиг.11.20. Забранена зона за АФЧХ на отворената система при зададена стойност на показателя на колебателност M

Тази зависимост съществува само за стойности на амплитудата

$$\frac{M}{M + 1} \leq A \leq \frac{M}{M - 1} \quad (11.97)$$

Максималният запас по фаза γ се получава, когато вектора OB е допирателен към окръжността $M = \text{const}$ и триъгълника OBD е правоъгълен. Тогава

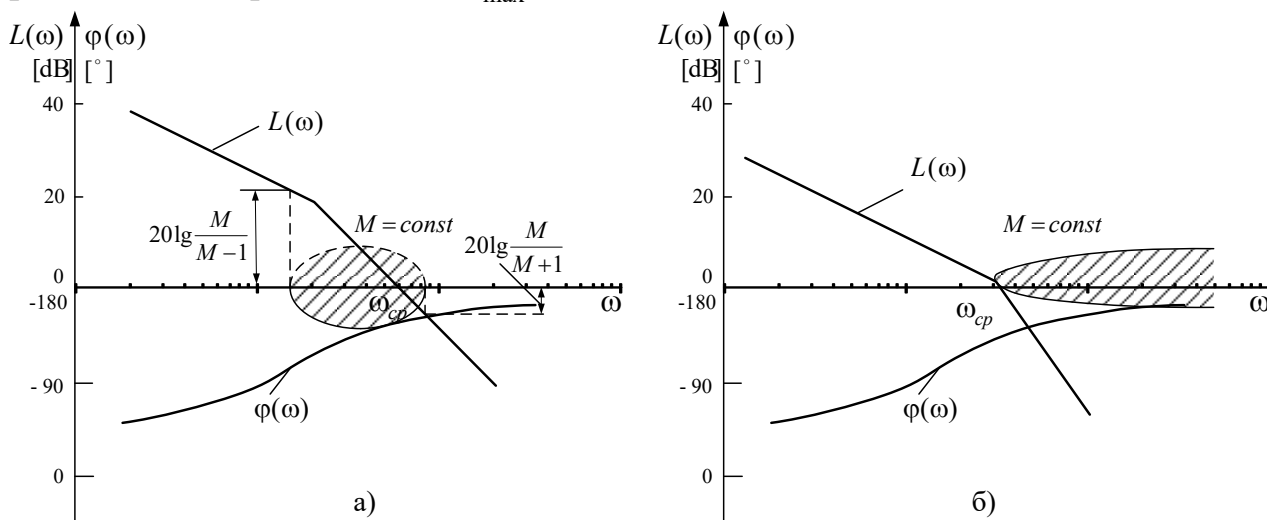
$$A = \sqrt{C^2 - R^2} = \sqrt{C}$$

$$\gamma_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{C}} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M^2} = \arcsin \frac{1}{M} = \arctg \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Изразът (11.96) позволява да се построят графично зависимостите $\gamma = f(A)$ за различни значения на $M = \text{const}$. При построяване на γ - кривите, амплитудата A обикновено се нанася в децибели $L = 20 \lg A$;

γ - кривите позволяват да се построи забравената зона при зададен показател на колебателност M за ЛФЧХ $\varphi(\omega)$ по зададена ЛАЧХ фиг. 11.21, а. Построява се исканата стойност на запаса по фаза за всяка стойност на амплитудата, лежаща в границите (11.97).

γ - кривите може също така да се построи забравената зона при даден показател на колебателност M за ЛАЧХ при зададена ЛФЧХ фиг. 11.21, б. ту се построява исканата стойност на амплитудата за всяка стойност на запаса по фаза, лежащ в границите $0 - \gamma_{\max}$



Фиг. 11.21 Забранени зони $M = \text{const}$

а – за ЛФЧХ

б – за ЛАЧХ

11.14. Интегрални критерии за оценка на качеството

Интегралните оценки на качество за комбинирани критерии – те оценяват едновременно запасът на устойчивост, бързодействието и установената грешка. Интегралните оценки са основани на базата на условни интегрални показатели характеризиращи достатъчно просто отклонението на преходния процес на реалната система от идеалния. Под идеален преходен процес обикновено се разбира или степенчат процес протичащ мигновено без пререгулиране, или

процес протичащ по експонента със зададени параметри. Най-проста от интегралните оценки е показателя.

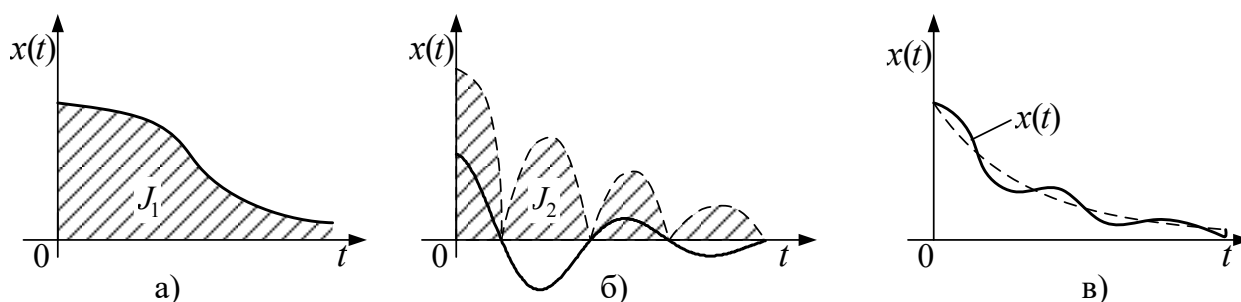
$$J_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt, \quad (11.98)$$

където $x(t)$ - грешката на системата.

Показателят J_1 представлява алгебричната сума от площите под кривата на преходния процес фиг. 11.22, а. Колкото по-малка е стойността на J_1 толкова по-високо е качеството на системата. Това е вярно обаче, само за апериодичните преходни процеси, когато не се мени знака на $x(t)$. При колебателни преходни процеси, качеството на системите се оценява с квадратичния интегрален критерий.

$$J_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt \quad (11.99)$$

Показателят J_2 е толкова по-малък, колкото по-бързо затихва преходния процес в системата фиг. 11.22, б. Обаче квадратичния критерий не винаги е удачен, тъй като при такава оценка на качеството силно колебателния процес с голямо пререгулиране може да изглежда по-добър от монотонния. Квадратичната оценка не отчита близостта на системата към колебателната граница на устойчивост.



Фиг. 11.22. Интегрални критерии за качество

Да се изключи силната колебателност е необходимо да се наложат ограничения не само на грешката но и на скоростта $\dot{x}(t)$.

$$J_3 = \int_0^{\infty} \left[x^2(t) + T^2 \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 \right] dt \quad (11.100)$$

където T - времеконстанта.

Минимума на показателя J_3 означава, че получения преходен процес е близък до експонента с времеконстанта T . Действително

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_0^{\infty} [x^2(t) + T^2 \dot{x}^2(t)] dt = \int_0^{\infty} [x(t) + T\dot{x}(t)]^2 - 2T \int_0^{\infty} x(t) \dot{x}(t) dt = \\
&= \int_0^{\infty} [x(t) + T\dot{x}(t)]^2 - Tx^2(t) \Big|_0^{\infty}
\end{aligned}$$

Тъй като $x(\infty) \rightarrow 0$ и като се означава $x(0) = x_0$ се получава,

$$J_3 = \int_0^{\infty} [x(t) + T\dot{x}(t)]^2 dt + Tx_0^2 \quad (11.101)$$

Интегралът има минимум, ако под интегралната функция се обръща в нула. Следователно $x(t)$ ще удовлетворява уравнението

$$T \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (11.102)$$

Решение на което е

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{T}} \quad (11.103)$$

т. е. в случай за идеализиран преходен процес служи експонента към която трябва да се стреми реалния преходен процес фиг. 11.22, в. Такава оценка е целесъобразно да се използва, когато може да се укаже стойността на времеконстантата T . Определянето на интегралните оценки не изисква непременно решаване на диференциалните уравнения. Например интеграла J_2 може да се премести по формулите на Релей, Мак-Ленън или Красовски.

За още по-пълна оценка на качеството на преходните процеси чрез интегралните методи, трябва да се използват висшите квадратични интегрални оценки.

$$J_k = \int_0^{\infty} \left\{ x^2(t) + T_1^2 \dot{x}^2(t) + \dots + T_k^2 [x^{(k)}(t)]^2 \right\} dt. \quad (11.104)$$

ГЛАВА 12

НЕЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ ЗА АВТОМАТИЧНО РЕГУЛИРАНЕ

Всички реални технически системи, по принцип са нелинейни. Въпреки това първия етап от изследването им се състои в изследването на техните линейни математически модели, които са най-елементарни от възможните.

Теорията на линейните системи, която се базира на линеаризираните уравнение на движението е достатъчно добре разработена. Използването на тази теория при анализа и синтеза на системи има двойствен характер. Първо, има възможност строго да се анализират широк клас реални системи, с методите на линейната теория за устойчивост, като се използват метода на Ляпунов за устойчивост по първо приближение. Второ, често се допуска, че отклоненията на характеристиките на системите от линейните са малки и въз основа на това се приема методите на линейната теория за изследване на поведението на системите на само при малки отклонения от установените стойности, но и в по-широк диапазон. Получените при тези приемания резултати могат да се потвърдят или отхвърлят ат практиката, в зависимост от това колко е значително влиянието на пренебрегнатите нелинейности. За детайлно и всестранно изучаване на реалните системи линейните математични модели са често твърде опростени и груби, трябва да се разглеждат нелинейните модели.

Теорията на нелинейните автоматични системи, която се базира на нелинейните уравнения, представлява значително по-широка и разнообразна част от науката, отколкото теорията на линейните системи.

Един от проблемите на нелинейната теория се състои в *анализа* на поведението на системите в динамичен режим. С други думи, първата задача на нелинейната теория е да се отчетата в уравненията на движение тези нелинейности, които са присъщи на определени звена на реалната система, да се изясни как тези нелинейности влияят на работата на системата, да се намери начин за компенсация на вредното влияние и използване на положителното влияние на тези нелинейности.

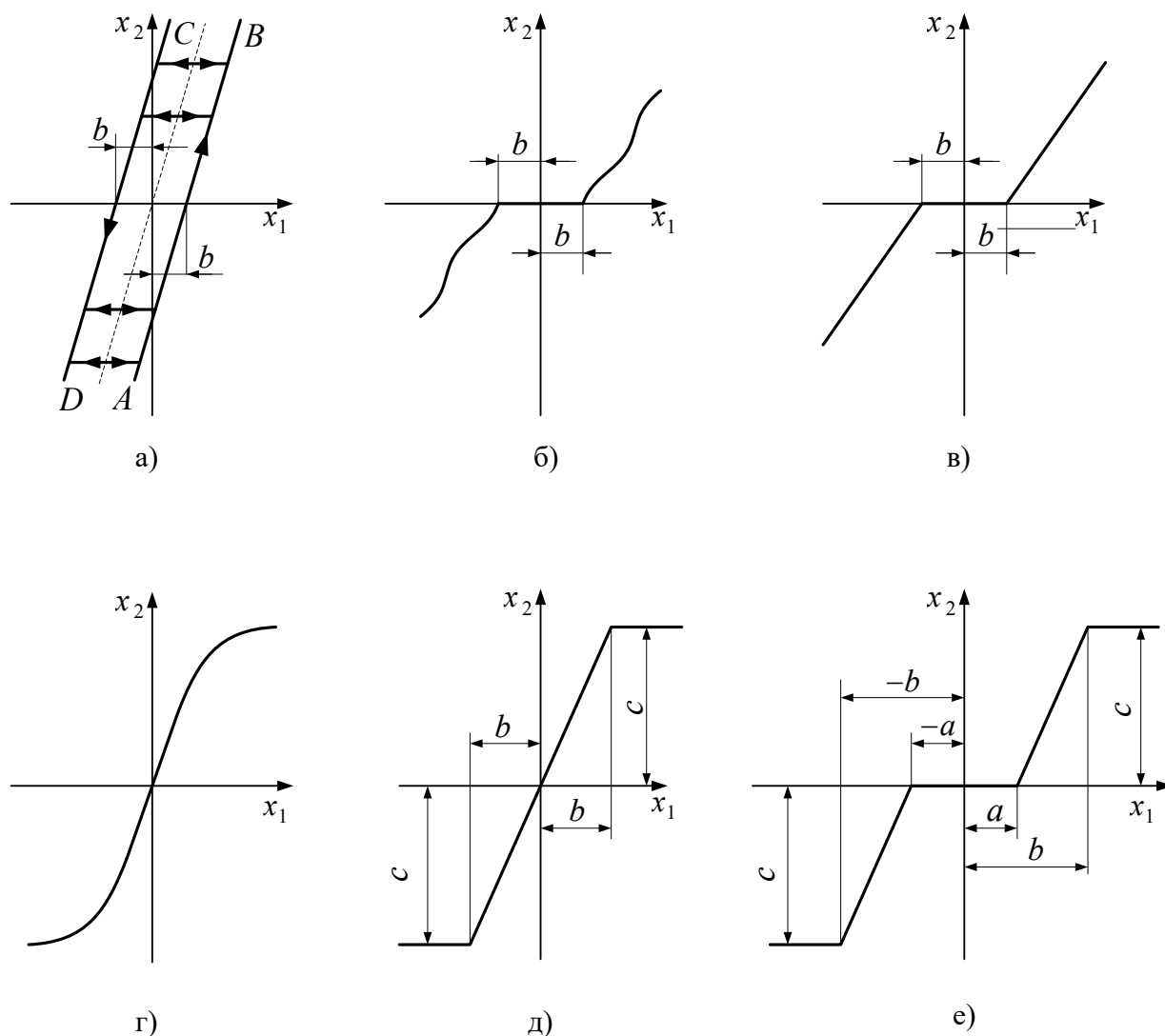
Друг проблем в теорията на нелинейните системи се състои в *синтеза* на такива нелинейни системи, които по-най добър начин ще покрият изискванията към тях. С други думи, втората задача в теорията на нелинейните автоматични системи – да се изясни, какви нелинейности трябва да се въведат в реалната система, за да бъде тази система оптимална според предварително зададен критерии. Тази задача е непосредствено свързана със създаването на адаптивни и оптимални системи, със синтез на нелинейни закони за управление и т . н.

При построяването на нелинейните модели на автоматичните системи обикновено се отделят няколко, едно или две звена с нелинейни уравнения, като се счита, че уравненията на останалите звена се линейни. По този начин се отчита най-силно изразената нелинейност. Ако движението на останалите звена достатъчно точно се описва с решенията на линейните уравнения то при този

метод на изследване може да се получат достатъчно точни резултати, добре съгласуващи се с експерименталните резултати. При всички случаи, такъв нелинеен модел по пълно отразява свойствата на реалната система в сравнение с линейния модел.

Нелинейните звена могат да се са:

- Звено от релеен тип
- Звено с частично линейна характеристика
- Звено с криволинейна характеристика с произволна форма
- Звено, в уравнението на което се съдържат произведение от променливите или техните производни и други комбинации
- Нелинейно звено със закъснение
- Логическо звено
- Звена, описващо се с частично линейни диференциални уравнения, в това число и с променлива структура



Фиг. 12.1. Типични нелинейности

а – лупт; б - мъртва зона, в – мъртва зона при по части линейна апроксимация; г- зона на насищане; д - зона на насищане при по части линейна апроксимация; е – характеристика с мъртва зона и зона на насищане

Различават се статични и динамични нелинейности. Първите се представят във вид на нелинейни статични характеристики, а вторите във вид на нелинейни диференциални уравнения.

Общия метод за съставяне на уравненията за нелинейните системи се състои в следното:

1. Линеаризират се всички уравнение на звената в системата, за които това е допустимо, освен съществено нелинейните звена /най често това се едно или две звена/.
2. Съставят се уравненията на нелинейните звена
3. Получава се система от обикновени линейни уравнения, в които се добавят едно две /или повече/ нелинейни уравнения.

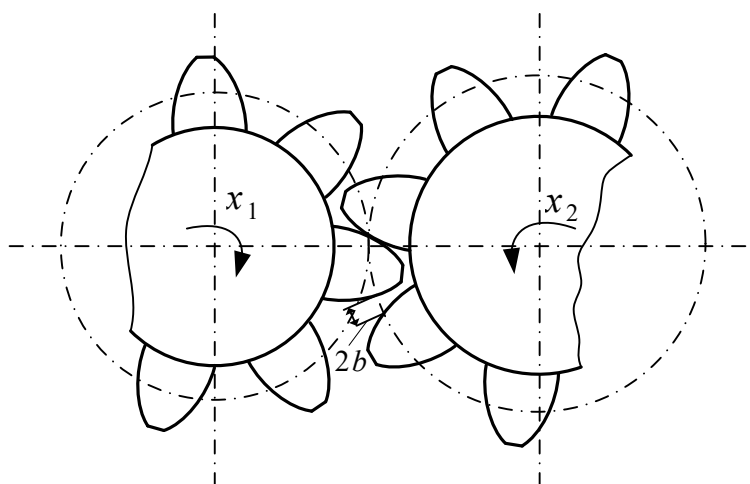
В съответствие с това обобщената структурна схема за нелинейна система за автоматично регулиране се отделят нелинейните звена в нелинейна част, а всички останали /линейни и линеаризирани/ звена са в линейната част.

12.1. Типични нелинейности

Изучаването на реалните характеристики на автоматичните устройства позволява да се отделят типичните нелинейности, които се срещат най-често.

1. Нелинейност от тип луфт.

Приема се входната x_1 и изходната x_2 величина да са ъглите на завъртане на водещото и водимото колело на зъбна двойка. При изменение на входната величина x_1 изходната x_2 величина остава постоянна, докато не се обере луфта в зацепването. Процеса на обирање на луфта съответства на една от хоризонталните отрезки от характеристиката при които $x_2 = const$, а движението при обран луфт – на наклонените линии - фиг. 12. 1, а.



Фиг. 12.2. Зъбна предавка

Вижда се, че при въртенето на водещото колело на зъбната двойка с едната посока /например при нарастване на x_2 /луфтът е обрат в едната страна, а при

въртене в противоположната посока – в другата. За това при нарастване на x_2 изобразяващата точка се движи по правата AB , а при намаляване – по правата CD , т. е.

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= k(x_1 - b) \quad \text{при} \quad \frac{dx_2}{dt} > 0 \\ x_2 &= k(x_1 + b) \quad \text{при} \quad \frac{dx_2}{dt} < 0 \end{aligned} \right\}, \quad (12.1)$$

където b - е половината на луфта; k - е коефициент на пропорционалност.

Хоризонталните линии между правите AB и CD се описват с уравненията

$$x_2 = \text{const} \quad \text{при} \quad -kb < x_2 - kx_1 < kb. \quad (12.2)$$

Като цяло характеристиката от тип луфт се описва с уравненията (12.1) и (12.2). Такъв тип характеристика има при наличие на хлабини /луфтове/ в лостови съединения, и др.

2. Нелинейност от тип мъртва зона /зона на нечувствителност/ – фиг. 12.1, б.

Тази нелинейност се характеризира с интервал на изменение на входната координата, за която изходната координата е равна на нула.

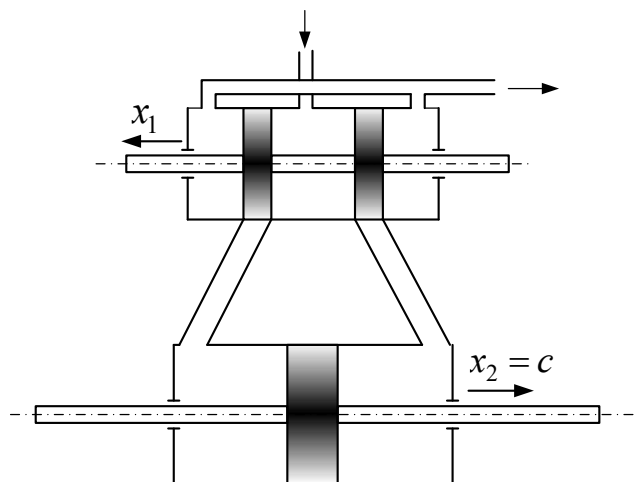
Нелинейността от тип мъртва зона се среща в повечето изпълнителни елементи, при това x_1 - е управляващия сигнал, x_2 - скорост на изменение на координата на изпълнителния елемент. Например скоростта на хидравличен серво мотор /хидравличен цилиндър управляван от хидравличен разпределител/ е равна на нула $x_2 = 0$, докато пада на налягане в камерите на достигне определена стойност $x_1 = \pm b$. Наличието на мъртва зона в сервомоторите се обяснява със силата на триене между буталото и стената на цилиндъра, със силата на сухо триене в регулиращия орган – разпределителя, и в предавателния механизъм между сервомотора и регулиращия орган. Освен това мъртвата зона може и да е следствие от утечките между буталото и цилиндъра.

Характеристика от тип мъртва зона съществува в хидравличните разпределители с положително припокриване. В този случай плунжерът трябва да се премести на определено разстояние за да се открият отворите и да протече работната течност.

При частично линейна апроксимация нелинейната характеристика с мъртва зона фиг.12.1, в, може да се опише с:

$$x_2 = \begin{cases} k(x_1 - b) & \text{при} \quad x_1 \geq b \\ k(x_1 + b) & \text{при} \quad x_1 \leq -b \\ 0 & \text{при} \quad |x_1| \leq b \end{cases} \quad (12.3)$$

3. В практиката при повечето усилвателни и изпълнителни елементи е характерна нелинейност от тип зона на насищане или ограничение на мощността – фиг. 12.1, г.

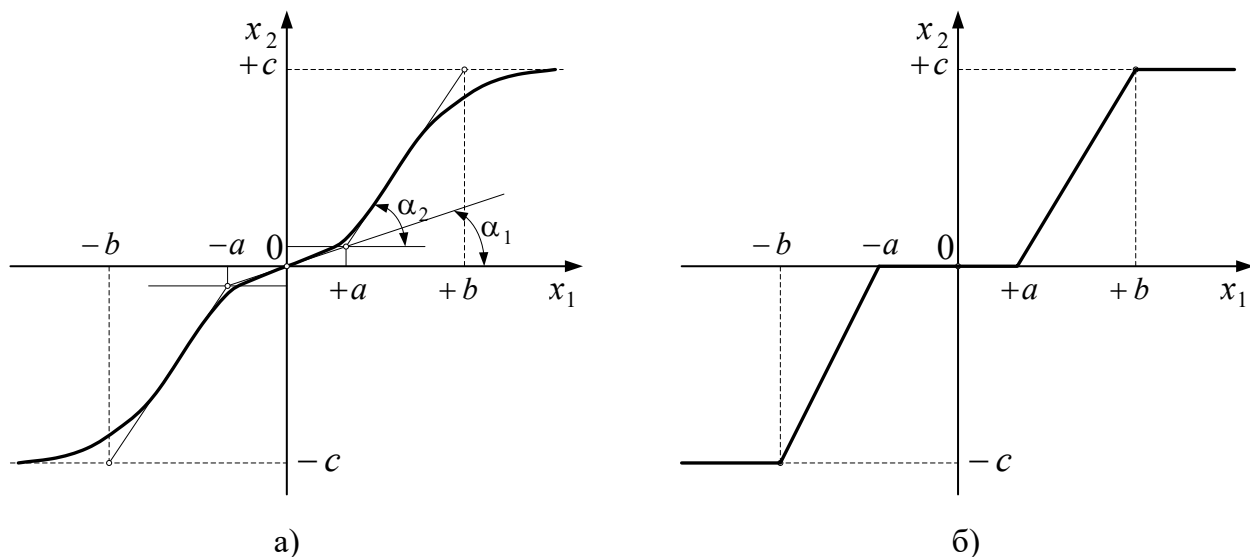


Фиг. 12.3. Хидравличен цилиндър и разпределител

В хидравличните сервомотори управлявани от разпределители тази нелинейност се получава, ако хода на плунжера е по-голям от дължината на управляващия процеп; след като се отвори напълно, преместването на плунжера x_1 вече не променя дебитът на течността постъпващ към буталото на сервомотора и скоростта му остава постоянна $x_2 = c$. Ако сервомоторът се управлява с разпределител със струйна тръба, то при малък ход на тръбата става пълно отваряне на едната от приемащите дюзи и затваряне на другата, така че по-нататъшното преместване на тръбата не променя откриването на дюзите и, следователно не се променя скоростта на сервомотора. Нелинейността от тип насищане е характерна за електронните, магнитните и др. усилватели, мощността на които е ограничена. При частично линейната апроксимация – фиг. 12.1, д, характеристиката се описва с уравненията:

$$x_2 = \begin{cases} kx_1 & \text{при } |x_1| \leq b \\ c & \text{при } x_1 \geq b \\ -c & \text{при } x_1 \leq -b \end{cases} \quad (12.4)$$

4. Най-често статичните характеристики на различните усилватели /хидравлични, пневматични, електронни и др./ имат вида показан на фиг. 12.2, а. Ако усилвателят е хидравличен или пневматичен с управление на работния флуид с помощта на плунжерен разпределител, то входната величина x_1 - е преместването на плунжера, а изходната величина x_2 е дебитът на флуида или скоростта на изходното звено на изпълнителния двигател. Характеристиката достатъчно точно може да се апроксимира с отрезни от прави линии, показани на фигурата с прекъснати линии. Като резултат се получава частично линейна характеристика с променлив коефициент на усилване в отделните участъци.



Фиг. 12.4 Нелинейни характеристики, апроксимиращи статичната характеристика на реален усилвател

a – с променлив коефициент на усилване, b – със зона на нечувствителност и насищане

Уравнението на такава характеристика се записва по следния начин:

$$x_2 = \begin{cases} k_1 x_1 & \text{при } -a < x_1 < a \\ k_1 a + k_2 (x_1 - a) & \text{при } b \geq x_1 \geq a \\ -k_1 a + k_2 (x_1 + a) & \text{при } -b \leq x_1 \leq -a \\ c \operatorname{sign}(x_1) & \text{при } x_1 \geq b; x_1 \leq -b \end{cases} \quad (12.5)$$

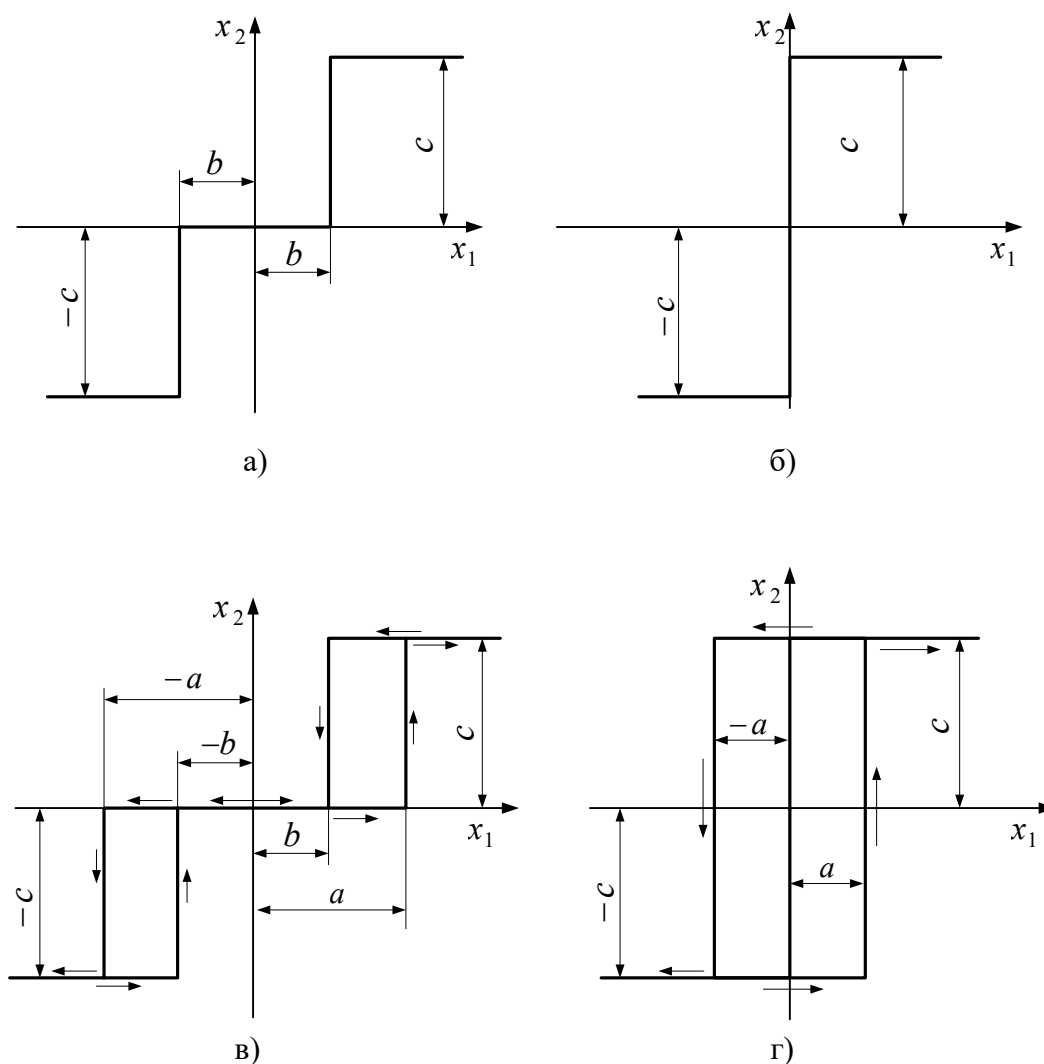
където $k_1 = m \operatorname{tg} \alpha_1$; $k_2 = m \operatorname{tg} \alpha_2$, m - коефициент на мащаба.

Като се положи в (12.5) $k_1 = 0$, се получава статичната характеристика с мъртва зона и зона на насищане – фиг.12.4, б.

5. За електромеханичните елементи на автоматиката са характерни релейните характеристики. Релейна характеристика се нарича зависимостта $x_2 = f(x_1)$, при която на непрекъснатото изменение на входната величина x_1 съответства скокообразно изменение на изходната величина x_2 при определени стойности на x_1 , а между тези стойности координатата x_2 остава постоянна.

На симетрична релейна характеристика с мъртва зона фиг. 12.53, а, която описва работата на три позиционно реле съответства уравнението

$$x_2 = \begin{cases} c & \text{при } x_1 > b \\ 0 & \text{при } -b < x_1 < b \\ -c & \text{при } x_1 < -b \end{cases} \quad (12.6)$$



Фиг. 12.5. Релейни характеристики

а – релейна характеристика с мъртва зона; б – идеална релейна характеристика, в – релейна характеристика със зона на неоднозначност /хистерезис/; г – релейна характеристика със зона на неоднозначност /хистерезис/ и мъртва зона.

Ако мъртвата зона е много малка се получава характеристиката на идеално реле 12.5, б. Описва се с уравнението

$$x_2 = c \operatorname{sign}(x_1) \quad (12.7)$$

С уравнение от вида (12.7) може да се представи и характеристиката на силата на сухото триене F_{fr} в зависимост от скоростта на движение v на единия от елементите на триещата двойка.

В този случай като входна величина x_1 се приема скоростта v , а за изходна величина x_2 – силата F_{fr} .

Стойностите на големината на тока при включване и изключване на електромагнитното реле мога да са различни – 12.5, в, г. Подобни характеристики имат и дискретни струйни елементи, в които входната величина е пада на налягане в управляващите канали, а изходната величина –

пада на налягане в изходните канали. Такъв вид на статичната характеристика се описва с уравнението:

$$x_2 = \begin{cases} c & \text{при } \begin{matrix} x_1 > a \\ b < x_1 < a \end{matrix} \quad \frac{dx_1}{dt} < 0 \\ 0 & \text{при } \begin{matrix} b < x_1 < a \\ -b < x_1 < b \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} > 0 \\ \frac{dx_1}{dt} < 0 \end{matrix} \\ -c & \text{при } \begin{matrix} x_1 < -a \\ b < x_1 < a \end{matrix} \quad \frac{dx_1}{dt} > 0 \end{cases} \quad (12.7)$$

Освен разгледаните по-горе нелинейни статични характеристики, са известни и други видове нелинейности, като умножение на променливите, повдигане на степен, или в диференциалните уравнения влизат нелинейни функции заедно с производните по време.

12.2. Особености на поведението на нелинейните системи

Нелинейните характеристики на елементите по различен начин влияят на поведението на системите. При слабо изразени нелинейности, например малка зона на нечувствителност в характеристиката на усилвателя или незначително сухо триене, преодолявано от двигателя, изследването на линейни модели без отчитане на тези нелинейности води до резултати, които добре се съгласуват с опитни изследвания на реалната система. При по-силно влияние на нелинейностите поведението на реалната система може значително да се различава от описаното от линейни модели, вследствие на възникване на режими, присъщи на нелинейните системи.

Една от важните особености на нелинейните системи е, че те могат да са устойчиви при малки отклонения на променливите от стойностите, определящи изследвания режим, а при по-големи отклонения да се окажат неустойчиви. Съответно възниква необходимост нелинейните системи да се изследват при малки отклонения от установените стойности и при големи отклонения. Освен това в нелинейните системи могат да възникнат автоколебания.

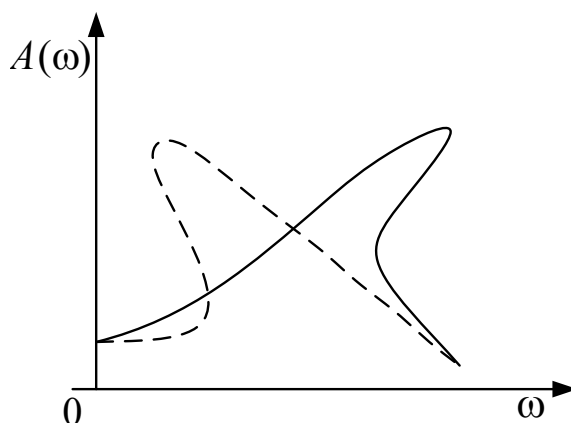
Автоколебания се наричат самоустановяващи се незатихващи колебания, които съществуват в системата при отсъствие в системата на външно въздействие, като амплитудата и честотата на колебанията се определят от свойствата на системата.. Тези автоколебания се отличават от принудените

колебания, честотата и амплитудата на които непосредствено зависят от честотата и амплитудата на външното въздействие. Амплитудата на свободните незатихващи колебания, възникващи в линейни системи намиращи се на границата на устойчивост, също зависят от външните въздействия. Автоколебанията могат да се близки до хармоничните колебания при малки загуби на енергия в системата.. при голямо разсейване на енергия в системата автоколебанията по форма могат съществено да се различават от синусоидалните, като се превръщат в *релаксационни* колебания.

Енергийното условие за съществуване на автоколебания е баланса на притока на енергия в системата от външен източник и загубите на енергия в системата за периода на колебание. Такъв баланс може да настъпи само при определени стойности на амплитудата на автоколебанията.

В нелинейните системи може да има няколко равновесни състояния, към които в зависимост от големината на началните условия и входните въздействия се стремят преходните процеси.

При хармонично изменение на входната величина, закона на изменение на изходната величина при нелинейните елементи се различава от хармоничния. Освен това, в някои случаи увеличението на честотата на колебанията на входната величина може първоначално да предизвика увеличение на амплитудата на изходната величина, а след това при незначителна увеличение на честотата рязко да намали тази амплитуда. Това явление се нарича *резонанс със скок*. При резонанс със скок зависимостта на амплитудата на изходната величина от честотата се получава нееднозначна, резонансния пик е огънат по посока на увеличение на честотата или обратно – фиг. 12.4. Например резонанс със скок може да се наблюдава при система с маса, вискозно триене и пружина нелинейна характеристика.



Фиг. 12.6. Резонанс със скок

В нелинейните системи може да възникне така нареченото *честотно захващане*, при което в две заедно нелинейни системи собствените честоти се свеждат до една стойност, като разликата между тях става малка.

Изследването на нелинейните системи е свързано с усложнен математичен апарат, защото анализа и синтеза на тези системи се прави с нелинейни

диференциални уравнения. При нелинейните системи не може да се приложи принципът на суперпозицията и следователно реакцията на произволно входно въздействие не трябва да се определя във вид на сума от реакции на последователни скокообразни въздействия или импулси. Формата на преходния процес, предизвикан в нелинейната система от стъпаловидно въздействие зависи от големината на въздействието. Следствие на посочените особености на процесите в нелинейните системи за описанието им не могат да се използват независими от входното въздействие предавателни функции, които са ефективни при изследването на линейни системи.

В теорията на автоматичното регулиране и управление са разработени и се прилагат при изследване на нелинейни системи различни методи. Разделят се на *точни и приближени*. Към точните методи за анализ на нелинейни системи се отнасят:

- Пряк метод на Ляпунов
- Метода на фазовите траектории и точковите преобразувания
- Честотен метод на В. М. Попов

От приблизителните методи се използва най-често метода на хармоничната линеаризация. При този метод се разширяват честотните методи за изследване на линейни системи към нелинейни системи.

Пресмятането на конкретните системи обикновено се прави на компютър с подходящ софтуер най-често MatLab, MathCad, или др. Независимо от това, аналитичните методи на изследване на нелинейните системи имат важно значение при проектиране на реални системи. С помощта на аналитичните методи може да се постигнат по-обща резултати с добре обозрими закономерности, определящи влиянието на различни параметри върху поведението на системата.

При изследването на нелинейните системи обикновено се изследват аналогични задачи, както и в линейните системи, но освен това се прави анализ на условията на съществуване и устойчивостта на автоколебанията. В зависимост от вида задачи и свойствата на изследваната система може да се използват различни методи за изследване. Например задачата за устойчивост на нелинейните системи се решава с прекия метод на Ляпунов, честотния метод на Попов, метода на фазовите траектории, метода на хармоничната линеаризация.

Метода на хармоничната линеаризация е особено удобно да се използва за изследване на нелинейни системи, описвани от диференциални уравнения от висок ред.

12.3. Устойчивост на нелинейни системи

Основните методи за изследване на устойчивостта на нелинейните системи се различават съществено от методите за анализ на линейните системи. На първо място това е свързано с това, че свойството устойчивост в нелинейните системи зависи от началните условия и външните въздействия; при едни входни въздействия системата ще бъде устойчива, а при други става

неустойчива. Следователно за техния анализ не могат да се използват разработените в линейната теория критерии за устойчивост.

Устойчивостта на нелинейната система за автоматично регулиране, че малките изменения на входните сигнали или смущения, началните условия или параметрите на обекта не извеждат изходната променлива извън границите на достатъчно малка околност на точката на равновесие или граничния цикъл. Понеже за нелинейните системи могат да съществуват няколко положения на равновесие, трябва да се анализира устойчивостта в околностите на всяко от тях.

В основата на метода за изследване на устойчивостта на нелинейните системи лежи теорията на устойчивостта на движението, предложена от А. М. Ляпунов.

Предполага се, че работата на нелинейната система в динамичен режим се описва от следната система от диференциални уравнения

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (12.8)$$

$$k = 1, \dots, n,$$

където:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - фазови координати описващи еднозначно поведението на системата,

$X_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - нелинейни функции на своите аргументи.

Приема се, че в уравненията (12.8) стойностите на променливите x_k се отчитат от нулевите им стойности.

Системата от уравнения (12.8) се нарича *уравнения на смутеното движение* на системата /или уравнения на преходния процес/.

Несмутеното движение /състоянието на покой на системата/ се описва от частното решение на системата (12.8).

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0 \quad (12.9)$$

Ако в началния момент за $t = 0$ част от променливите са различни от $x_n \neq 0$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_3(0) = x_{30}, \dots, x_n(0) = x_{n0}, \quad (12.10)$$

то в системата възниква динамичен процес

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t), \quad (12.11)$$

който се получава от решението на системата диференциални уравнения на смутеното движение.

12.4. Теорема на Ляпунов за устойчивост на движението:

Ако уравненията на несмутеното движение на нелинейната система (12.9) са такива, че за реално положително число ε , колкото и малко да е то, може да се

намери съответно положително число δ , такова, че при начални смущения ограничени от неравенствата

$$|x_{10}| \leq \delta, |x_{20}| \leq \delta \dots |x_{n0}| \leq \delta \quad (12.12)$$

съответните решения на уравненията на смутеното движение (12.11) се ограничават от неравенствата

$$|x_1(t)| \leq \varepsilon, |x_2(t)| \leq \varepsilon, \dots |x_n(t)| \leq \varepsilon, \quad (12.13)$$

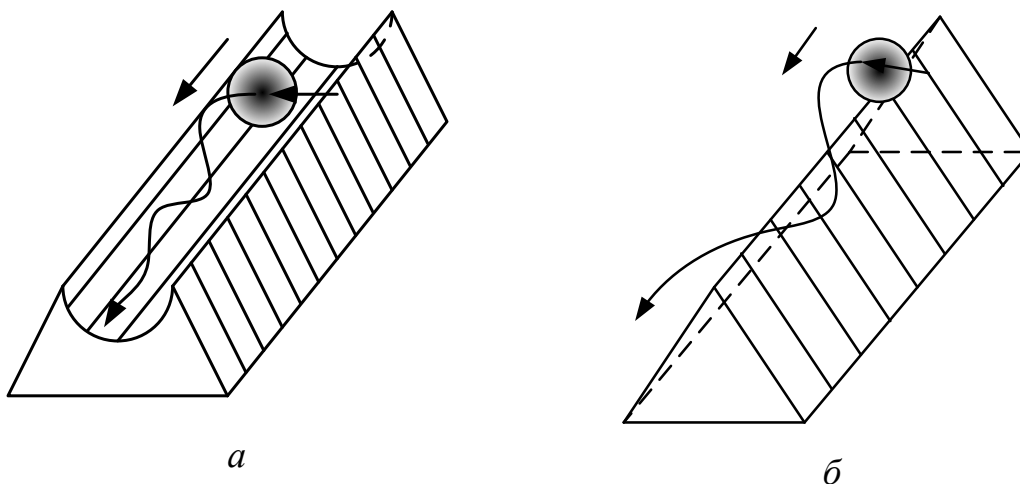
то несмутеното движение на системата е устойчиво по Ляпунов.

Ако освен това

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_k(t) \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (12.14)$$

то несмутеното движение се нарича асимптотически устойчиво.

Несмутеното движение ще бъде устойчиво, ако при достатъчно малко начално отклонение произволно смутено /отклонено/ движение ще бъде достатъчно близко до несмутеното /неотклоненото/. Пример за устойчиво по Ляпунов движение може да служи търкаляне на топче по жлеб, като пример за неустойчиво движение е движението на топчето по ръба на пирамида.



Фиг. 12. 7. Устойчиво *a*, и неустойчиво *б*, движение на топче

Неустойчиви движения според теорията на Ляпунов и състояния на равновесие могат да се получат само при разглеждане на идеализирани математични модели, физически могат да съществуват само устойчиви по Ляпунов движения и състояния на равновесие. За това, ако се иска даден установен режим в системата да съществува фактически, той трябва да е пресметнат като устойчив по Ляпунов.

Може да се окаже, че при малки начални отклонения смутеното движение се приближава до несмутеното, а при големи начални отклонения – се отдалечава от него.

12.5. Метод на първото приближение

Допуска се, че функциите $X_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ / $k = 1, 2, \dots, n$ / които са десните части на уравненията на смутеното движение могат да се разложат в степенни редове, сходящи се при достатъчно малки стойности на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$. При това предположение тези функции могат да се линеаризират, като се разложат в ред, като се пренебрегнат нелинейните членове.

Като се развият в ред на Маклорен се получава:

$$X_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_k(0, \dots, 0) + \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_n} \right)_0 \Delta x_n + R_k(x_1, \dots, x_n)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad (12.15)$$

$R_k(x_1, \dots, x_n)$ - нелинейни членове с ред по-висок от първи.

Като се има в предвид

$$X_k(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad (12.16)$$

От уравнения (12.15) и (12.8) се получава

$$\frac{d\Delta x_k}{dt} = a_{k1}\Delta x_1 + a_{k2}\Delta x_2 + \dots + a_{kn}\Delta x_n + R_k(x_1, \dots, x_n) \quad (12.17)$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

където

$$a_{k1} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_1} \right)_0; \quad a_{k2} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_2} \right)_0 \quad \dots \quad a_{kn} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_n} \right)_0.$$

Като се премахнат нелинейните членове от по-висок порядък се получава система линейни диференциални уравнения, които се наричат *уравнения на първото приближение*:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}\Delta x_1 + a_{k2}\Delta x_2 + \dots + a_{kn}\Delta x_n \quad (12.18)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Известни са следните теореми на Ляпунов за устойчивост по първо приближение:

1. Ако всички корени на характеристичното уравнение на системата уравнения на първото приближение имат отрицателни реални части, то смутеното движение на нелинейната система е асимптотично устойчиво при малки отклонения, каквито и да са членовете, отхвърлени при съставяне на уравненията на първото приближение.

2. Ако сред корените на характеристичното уравнение на системата уравнения на първото приближение има дори един с положителна реална част, но несмутеното движение на нелинейната система е неустойчиво, каквито и да са членовете, отхвърлени при съставяне на уравненията на първото приближение.
3. Ако характеристичното уравнение на системата уравнения на първото приближение, които нямат корени с положителна реална част, имат корени, реалната част на които е равна на нула, то не трябва да се решава въпроса да устойчивостта на несмутеното движение на нелинейната система, без да се отчитат отхвърлените нелинейни членове при съставяне на уравненията на първото приближение.

В случаите, когато сред корените на характеристичното уравнение има корени с нулева реална част се наричат критични. В критичните случаи несмутеното движение може да бъде устойчиво или неустойчиво в зависимост от десните части на изходните нелинейни уравнения.

Методът за анализ на устойчивостта на нелинейните системи, по метода на първото приближение се състои в следното. Първоначално се линеаризират уравненията на движение на всички звена от системата. След това се определят знаците на реалните части на корените на характеристичното уравнение на линеаризираната система. По тези знаци и според теоремите на Ляпунов се съди за устойчивостта на нелинейната система.

Пример 12.1:

Уравненията на нелинейната система имат вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1^2 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1x_2 - x_2 \end{cases}$$

Уравненията на равновесието на системата имат вида:

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 - 2x_2 \\ 0 = x_1x_2 - x_2 \end{cases}$$

Една от точките на равновесието е:

$$x_{10} = 0, \quad x_{20} = 0,$$

Линеаризира се изходната система:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x_1}{dt} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 = (2x_1)_0 \Delta x_1 - 2\Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 = (x_2 - 1)_0 \Delta x_1 + (x_1)_0 \Delta x_2 \end{cases}$$

и добива вида

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x_1}{dt} = -2x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

Характеристичното уравнение има вида:

$$\begin{vmatrix} s & 2 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 2$$

Вижда се, че линеаризираната система е неустойчива, следователно и изходната система е неустойчива.

Пример 12.2:

Уравненията на нелинейната система имат вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 4x_2 + 18x_1^2x_2 - 21x_1x_2^5 \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 8x_2 - 12x_1x_2 - 36x_1^2x_2^4 \end{cases}$$

Една от точките на равновесието е:

$$x_{10} = 0, \quad x_{20} = 0, \quad - \text{уравнение на несмутеното движение}$$

Линеаризира се изходната система:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x_1}{dt} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 = 2\Delta x_1 + 4\Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 = -3\Delta x_1 + 8\Delta x_2 \end{cases}$$

и добива вида

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x_1}{dt} = -2\Delta x_1 + 4\Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} = -3\Delta x_1 + 8\Delta x_2 \end{cases}$$

Характеристичното уравнение има вида:

$$\begin{vmatrix} s-2 & -4 \\ -3 & s-8 \end{vmatrix} = (s-2)(s-8)-12 = s^2 - 10s + 4$$

$$s_{1,2} = 5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4} = 5 \pm 4.58$$

Има два реални положителни корени.

Вижда се, че линеаризираната система е неустойчива, следователно и изходната система е неустойчива.

Значението на теоремите на Ляпунов за устойчивост по първо приближение е в това, че те дават строго основание да се използват линеаризираните уравнения за анализ на устойчивостта. Сложната задача за анализа на решенията на нелинейни диференциални уравнения по въпроса за устойчивост в повечето случаи се свеждат да до алгебрична задача за определяне на корените на характеристичното уравнение.

Методът на първото приближение позволява да се установи устойчивостта на несмутеното движение само при малки отклонения, но остава въпроса за устойчивостта при големи отклонения. Нелинейната система, устойчива при малки отклонения може да се окаже при големи отклонения както устойчива, така и неустойчива.

12.6. Пряк метод на Ляпунов

Предполага се, че е формирана някаква функция на фазовите координати $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, която е непрекъсната и еднозначна в разглежданата област, заедно с частните си производни и се обръща в нула, когато всички координати са равни на нула:

$$V = V(0, 0, \dots, 0) = 0$$

Функцията V , която е равна на нула само при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, при всички други стойности на x_k в зададената област има един и същ знак, се нарича *знакоопределена* в тази област.

Функцията V , която е равна на нула не само при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, но и при други стойности на x_k в зададената област, а при всички останали стойности на x_k има един и същ знак, се нарича *знакопостоянна* в тази област.

За знакоопределена функция може да се счита, че уравненията

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad (12.19)$$

определят при достатъчно малки стойности на C затворени повърхности, обхващащи началото на координатната система $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, като повърхностите които съответстват на по-големи стойности на константата C , съдържат в себе си повърхности с по-малки стойности на тази константа.

Полага се, че координатите $x_1, x_2, \dots, x_n$ са функции на времето, които са решения на уравнението на смутеното движение. Изчислява се производната от функцията V по времето, като се диференцира като сложна функция.

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} \quad (12.20)$$

За да се изясни смисъла на този производна се взема система с две фазови координати x_1, x_2 .

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

Производната на функцията по зададено направление е равна на сумата от производните по взаимно перпендикулярни оси и косинусите на ъглите между тези оси и направлението. Приема се за ос допирателната $\vec{\tau}$ към линията на нивото на функцията V и нормалата $\vec{n}$ към тази функция, насочена по посока на нарастване на V - фиг. 12. 8.

Производната по направлението x_1

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, x_1) + \frac{\partial V}{\partial \tau} \cos(\tau, x_1)$$

По направление на линиите на ниво $V = \text{const}$ и $\frac{\partial V}{\partial \tau} = 0$ и тогава:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, x_1).$$

Аналогично за направлението x_2

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial \tau} \cos(\tau, x_2) + \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, x_2)$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, x_2).$$

Следователно за две координати:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial n} \left[\frac{dx_1}{dt} \cos(n, x_1) + \frac{dx_2}{dt} \cos(n, x_2) \right]. \quad (12.21)$$

По време на движението координатите на системата x_1, x_2 се променят, като за всеки момент от време приемат определени стойности. Ако променливите x_1, x_2 са координати на точка в равнината, то движението на системата ще съответства на преместването на тази точка в равнината. При изменение на времето изобразяващата точка ще опише определена траектория. Векторът на скоростта на изобразяващата точка е $\vec{u}$ и проекциите ѝ по координатните оси са:

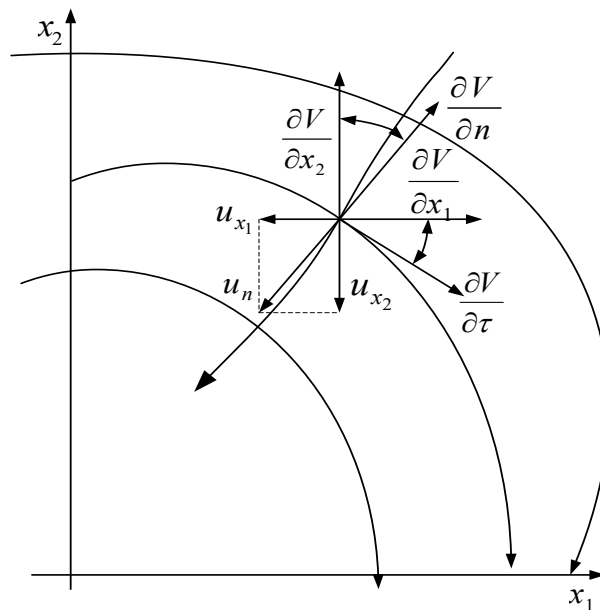
$$\frac{dx_1}{dt} = u_{x_1}; \quad \frac{dx_2}{dt} = u_{x_2}$$

Тогава според 12.20 се получава:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial n} [u_{x_1} \cos(n, x_1) + u_{x_2} \cos(n, x_2)] = u_n \frac{\partial V}{\partial n} \quad (12.22)$$

където u_n -проекция на вектора на скоростта на изобразяващата точка върху нормалата към линията на ниво на функцията V .

Тъй като нормалата е насочена по посока на нарастване на V , винаги е в сила $\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ и следователно знака на $\dot{V}$ съвпада с знака на u_n .



Фиг. 12. 8. Определяне на производна по направление

Знакът на производната от функцията V от времето съвпада със знака на проекцията на скоростта на изобразяващата точка върху нормалата към повърхността $V = C$.

За определяне на знака на производната $\dot{V}$ е необходимо всички множители $\frac{dx_k}{dt}$ да се заменят със стойностите им от уравнението на смутеното движение и тогава:

$$\dot{V} = X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} \quad (12.23)$$

Теорема на Ляпунов:

1. Ако диференциалните уравнения на смутеното движение са такива, че е възможно да се определи знакоопределена функция V , производната на която $\dot{V}$ според тези уравнения е или знакопостоянна функция с противоположен знак на V , или тъждествено равна на нула, то несмутеното движение е устойчиво.

Ако при това $\dot{V}$ представлява знакоопределена функция с противоположен на V знак, то несмутеното движение е асимптотично устойчиво.

2. Ако диференциалните уравнения на смутеното движение са такива, че е възможно да се определи функция V , производната на която $\dot{V}$ според тези уравнения е или знакоопределена функция, знакът на която при някои стойности на x_k , съвпада със знака на V , то несмутеното движение е неустойчиво.

За да се определи устойчивостта, е достатъчно да се определи функция V , удовлетворяваща теорема 1 на Ляпунов.

Пример 12.3:

Уравненията на система имат вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 + x_2(x_1 + x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_1(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Трябва да се определи устойчиво ли е несмутеното движение, което съответства на нулевото решение $x = x_2 = 0$

Избира се знакоопределена положителна функция на Ляпунов във вида:

$$V = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

Определя се пълната производна на функцията на Ляпунов по траекторията на движение:

$$\dot{V} = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2x_1[-x_1 - x_2 + x_2(x_1 + x_2)] + 2x_2[x_1 - x_1(x_1 + x_2)] = -2x_1^2$$

Функцията V е знакоопределена и съгласно теоремите несмутеното движение е устойчиво.

Основното преимущество на прекия метод на Ляпунов е в това, че чрез него може да се реши задачата за устойчивостта при големи отклонения.

Пример 12.4:

Уравненията на нелинейната система имат вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 4x_2 - 8x_1^3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 5x_2 + 4x_2^4 \end{cases}$$

Трябва да се определи устойчиво ли е несмутеното движение, което съответства на нулевото решение $x = x_2 = 0$

Избира се знакоопределена положителна функция на Ляпунов във вида:

$$V = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

Определя се пълната производна на функцията на Ляпунов по траекторията на движение:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2x_1 [-2x_1 + 4x_2 - 8x_1^3] + 2x_2 [6x_1 + 5x_2 + 4x_2^4(x_1 + x_2)] = \\ &= -4x_1^2 + 8x_1x_2 - 16x_1^4 + 12x_1x_2 + 10x_2^2 + 8x_2^5 \end{aligned}$$

Функцията $\dot{V}$ е знакостоянна отрицателна и съгласно теоремите несмутеното движение е устойчиво.

12.7. Фазови траектории

Предполага се, че диференциалното уравнение описващо поведението на нелинейната система е от втори ред

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_2x_1 = F\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right), \quad (12.24)$$

където: x_1 - променлива описваща еднозначно поведението на системата във времето, $\frac{dx_1}{dt}$ - първата ѝ производна по времето, a_1, a_2 - константи, $F\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right)$ - нелинейна функция на своите аргументи.

Ако се въведе нова променлива

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (12.25)$$

уравнение (12.24) се записва:

$$\frac{dx_2}{dt} + a_1x_2 + a_2x_1 = F(x_1, x_2) \quad (12.26)$$

След определяне от (12.26) на производната $\frac{dx_2}{dt}$ изходното уравнение (12.24) се записва, като система от две диференциални уравнения от първи ред:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -a_1x_2 - a_2x_1 + F(x_1, x_2) \\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \end{cases} \quad (12.27)$$

Като се раздели първото уравнение на второто се получава:

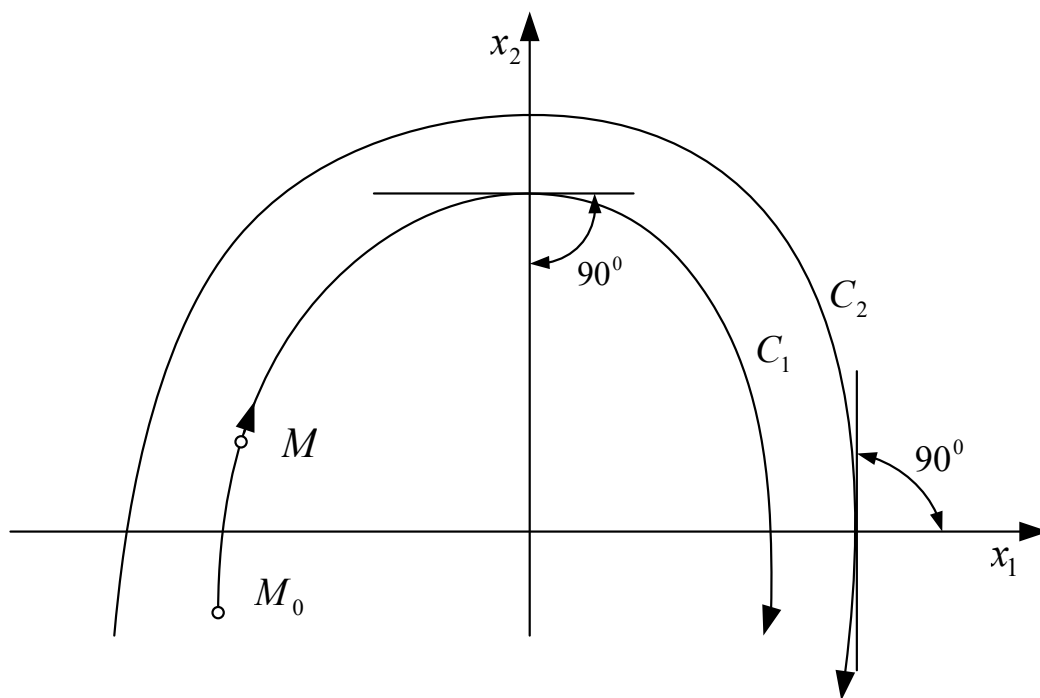
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F(x_1, x_2) - a_1 x_2 - a_2 x_1}{x_2}, \quad (12.28)$$

което се нарича диференциално уравнение на фазовите траектории. Особеност на това уравнение е, че в него времето не присъства в явен вид.

Решението на уравнението е:

$$x_2 = x_2(x_1, C), \quad (12.29)$$

където C - интеграционна константа. Получената зависимост определя така наречените фазови траектории на системата, фамилия от криви получени за различни стойности на началните условия (различни стойности на интеграционната константа C). На фиг. 12.9 са показани примерни фазови траектории на система. Съвкупността от всички фазови траектории, при различни начални условия, формират така наречения фазов портрет на системата.



Фиг. 12.9. Вид на фазовите траектории

Особености на фазовите траектории са следните.

1. Тъй като x_2 е скоростта на изменение на x_1 , когато $x_2 > 0$ - x_1 нараства и обратно, и като се има предвид, че двете величини са функции на времето, промяната им по фазовата траектория може да се представи като движение по кривата на някаква точка M , наречена изобразяваща и то е винаги по посока на часовниковата стрелка. При $x_2 = 0$ фазовите траектории пресичат оста x_1 под прав ъгъл, тъй като в тези точки координатата x_1 има екстремум.

2. Върху фазовия портрет съществуват и особени точки, за които производната $\frac{dx_2}{dx_1}$ е неопределена - $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{0}{0}$. Координатите на особените точки се определят от решението на системата от две алгебрични уравнения:

$$\begin{cases} -a_1x_2 - a_2x_1 + F(x_1, x_2) = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (12.30)$$

Тъй като за всички решения $x_2 = 0$, в тези точки скоростта е равна на нула и движението на системата се прекратява. Поради това те се наричат точки на покой. Решенията на системата (12.30) в зависимост от вида на функцията $F(x_1, x_2)$ могат да бъдат едно, две и повече, а понякога и безкрайно много. В последния случай се говори за отрязък на покой.

Построяването на фазовия портрет дава възможност да се проследят всички възможни движения на системата, при различни начални условия /движенията на изобразяващата точка М, спрямо точката (точките) на покой/. Ако изобразяващата точка с течение на времето неограничено се отдалечава от точката на покой, съответното равновесно състояние е неустойчиво. Обратно, ако изобразяващата точка, независимо от нейното начално положение, при движението си по фазовите траектории отива към точките на покой, равновесното състояние е устойчиво.

Съвкупността от фазовите траектории върху равнината се нарича фазов портрет на системата.

12.8. Фазови траектории на линейни системи

Ако в уравнение (12.26) се положи $F(x_1, x_2) = 0$ то добива вида:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_2x_1 = 0, \quad (12.31)$$

което е линейно диференциално уравнение. Уравнението на фазовите траектории е

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_1x_2 - a_2x_1}{x_2} \quad (12.32)$$

Полага се

$$z = \frac{x_2}{x_1}. \quad (12.33)$$

и след определяне на производната

$$\frac{dx_2}{dx_1} = x_1 \frac{dz}{dx_1} + z \quad (12.34)$$

и заместване в уравнение (12.31) се получава диференциално уравнение с отделящи се променливи

$$x_1 \frac{dz}{dx_1} + z = \frac{-a_1 z x_1 - a_2 x_1}{z x_1} = \frac{-a_1 z - a_2}{z}. \quad (12.35)$$

След отделяне на променливите

$$\frac{z dz}{z^2 + a_1 z + a_2} = -\frac{dx_1}{x_1} \quad (12.36)$$

и като се има предвид, че $z^2 + a_1 z + a_2$ е характеристичния полином на диференциалното уравнение, ако се означат с z_1 и z_2 корените на уравнението

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

за (12.36) се записва:

$$\frac{z dz}{(z - z_1)(z - z_2)} = -\frac{dx_1}{x_1}. \quad (12.37)$$

Корените на (12.37) могат да бъдат реални с положителен или отрицателен знак, комплексно спрегнати с положителна или отрицателна реална част, чисто имагинерни или реални с различни знаци. За всеки вид на корените фазовите траектории и фазовия портрет на системата имат различен вид, който ще бъде показан по долу.

Например за два чисто имагинерни корена от вида

$$z_1 = j\omega, z_2 = -j\omega,$$

където ω - положително число (12.37) добива вида

$$\frac{z dz}{(z - j\omega)(z + j\omega)} = -\frac{dx_1}{x_1} \quad (12.38)$$

или

$$\frac{z dz}{z^2 + \omega^2} = -\frac{dx_1}{x_1}. \quad (12.39)$$

Ако се интегрира (12.39) се получава:

$$\ln(z^2 + \omega^2) = -\ln x_1 + C_1, \quad (12.40)$$

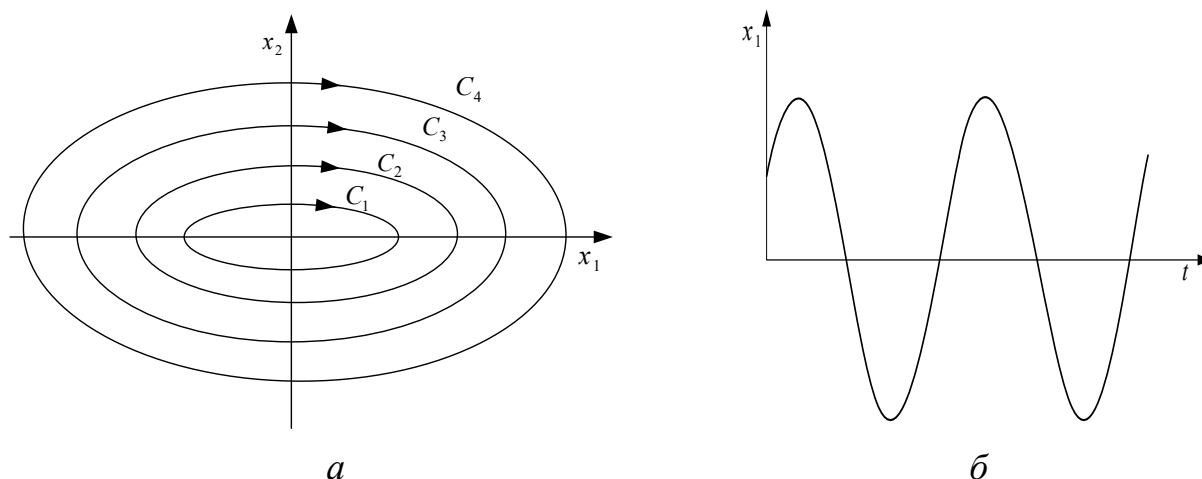
където се полага $C_1 = \ln C^2$ - интеграционна константа.

След антилогаритмуване на (12.40), връщане към първоначалните променливи - x_1, x_2 и известна преработка се получава

$$\left(\frac{x_2}{C}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{\frac{C}{\omega}}\right)^2 = 1, \quad (12.41)$$

което е уравнение на централна елипса с оси $\frac{C}{\omega}$ и C . Фазовия портрет в случая е показан на фиг. 12.10, а. Особената точка е една, с координати 0, 0 (центъра на координатната система) и се нарича **център**.

Преходният процес е показан на фиг. 12.10, б. Той е периодичен колебателен.

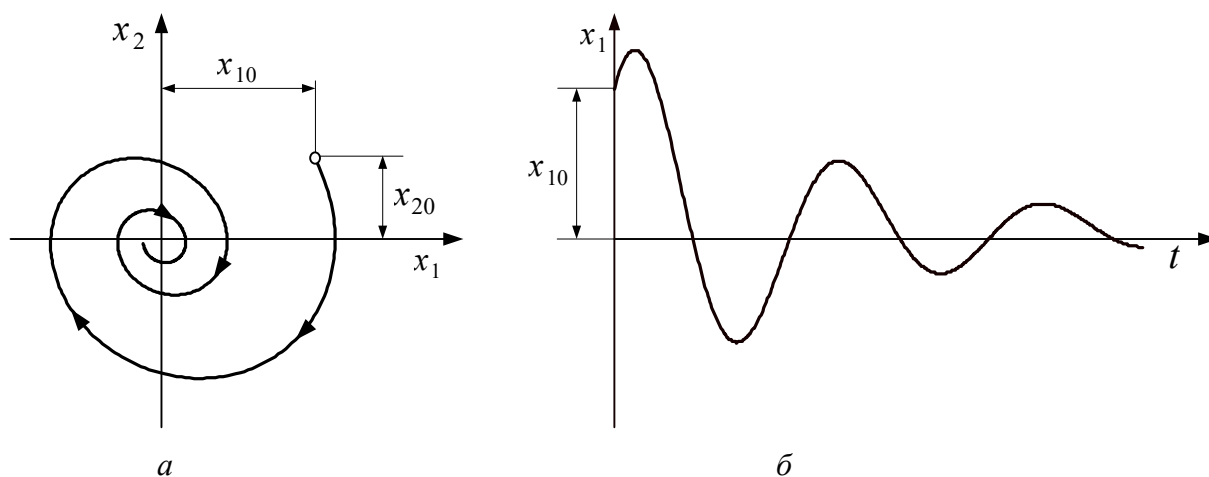


Фиг. 12.10. Фазови траектории тип център - а и съответният преходен процес – б.

1. Корените са комплексно спрегнати с отрицателна реална част

$$z_1 = -\alpha + j\omega, \quad z_2 = -\alpha - j\omega.$$

Уравненията на фазовите траектории се определят аналогично на горния случай и са показани на фиг. Това са спирали навиващи се по посока на центъра на координатната система (точката на покой). В случая особената точка се нарича **устойчив фокус**. Фазовата траектория и съответстващият преходен процес е показан на фиг. 12.11. Той е затихващ колебателен.

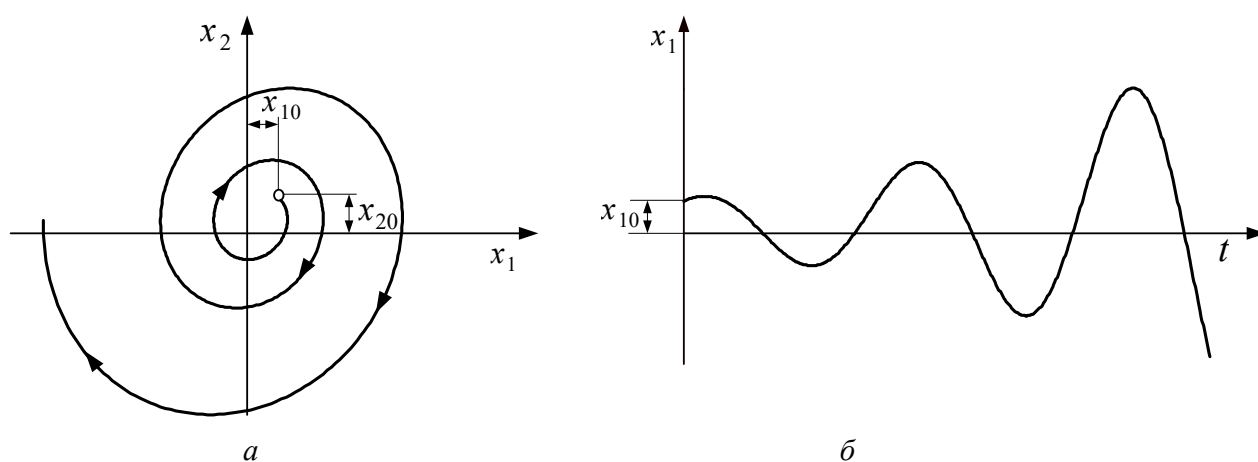


Фиг. 12.11. Фазови траектории тип устойчив фокус - а и съответният преходен процес – б.

2. Корените са комплексно спрегнати с положителна реална част

$$z_1 = +\alpha + j\omega, z_2 = +\alpha - j\omega.$$

Фазовите траектории са спирали отдалечаващи се от точката на покой и са показани на фиг. 12.12, а, съответния преходен процес, който е разходящ колебателен на фиг. 12.9, б. Особената точка се нарича **неустойчив фокус**.

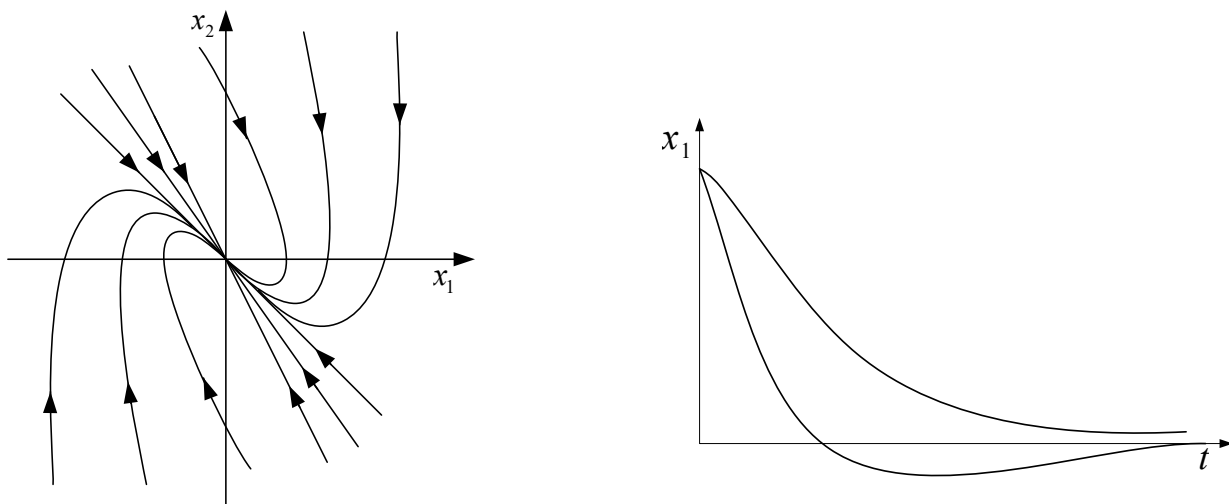


Фиг. 12.12. Фазови траектории тип неустойчив фокус - а и съответният преходен процес – б.

4. Корените са реални с отрицателна реална част

$$z_1 = -\alpha_1, z_2 = -\alpha_2.$$

Фазовите траектории се приближават към точката на покой и са показани на фиг. 12.13, а, а преходен процес за случая на фиг. 12.13, б. Това е затихващ апериодичен процес. Особената точка се нарича **устойчив възел**.

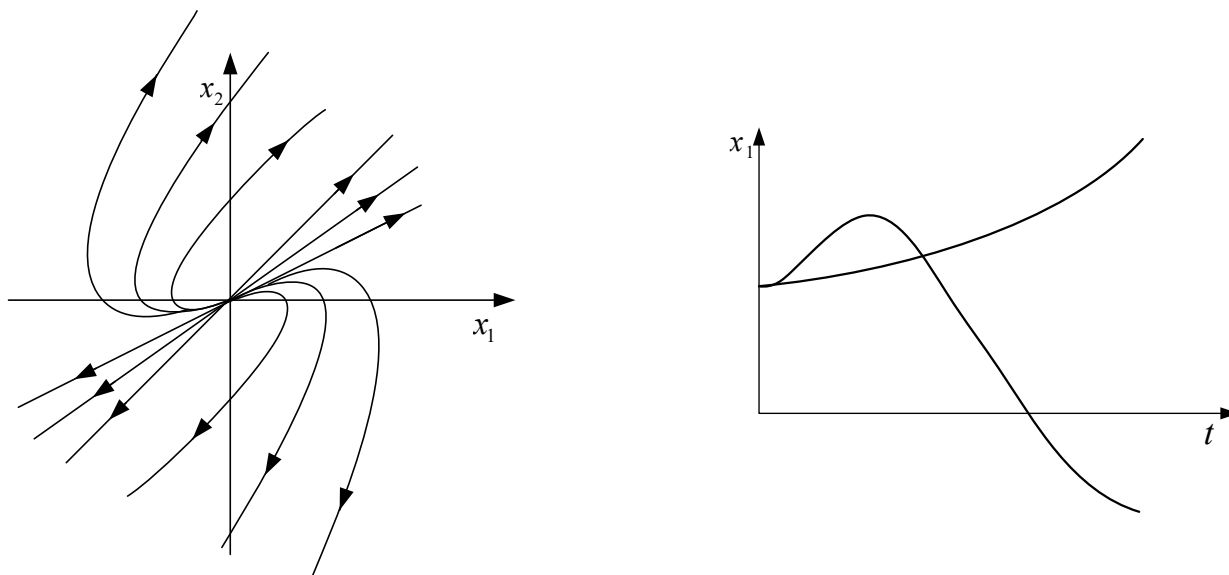


Фиг. 12.13. Фазови траектории тип устойчив възел - а и съответният преходен процес – б.

5. Корените са реални с положителна реална част

$$z_1 = +\alpha_1, z_2 = +\alpha_2.$$

Фазовият портрет е показан на фиг. 12.14, а, а преходният процес е разходящ аperiодичен и е показан на фиг. 12.14, б. Особената точка се нарича **неустойчив възел**.

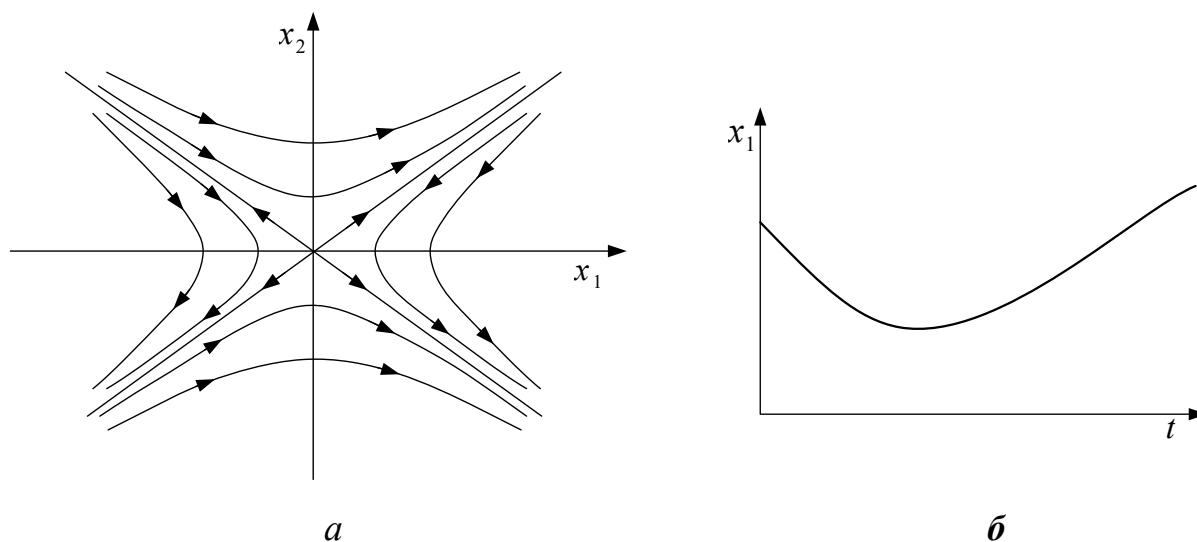


Фиг. 12.14. Фазови траектории тип неустойчив възел - а и съответният преходен процес – б.

6. Корените са реални с различни знаци

$$z_1 = +\alpha_1, z_1 = -\alpha_2.$$

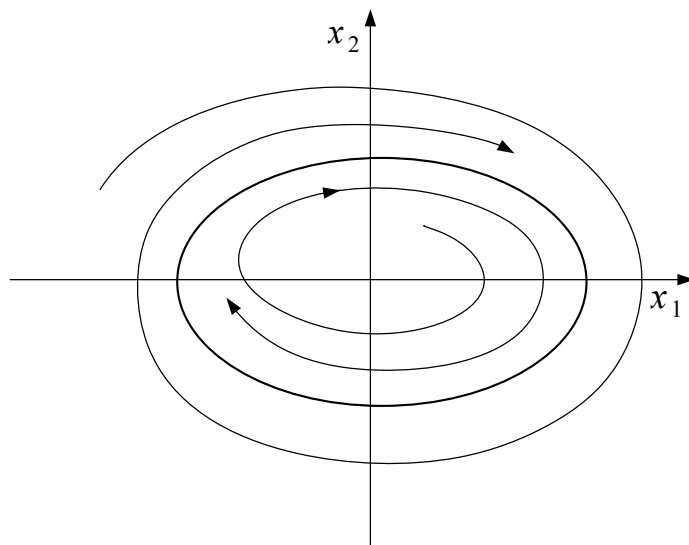
Фазовият портрет е показан на фиг. 12.15, а, а преходният процес е разходящ апериодичен и е показан на фиг. 12.15, б. Особената точка се нарича **седло**.



Фиг. 12.15. Фазови траектории тип седло - а и съответният преходен процес – б.

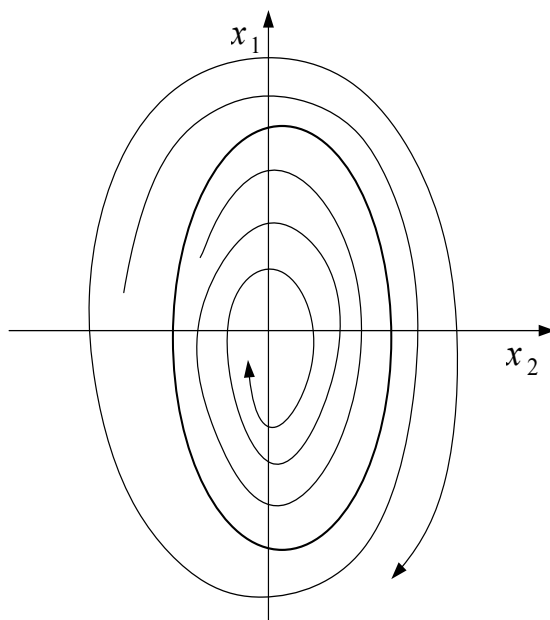
12.9. Фазови траектории на нелинейни системи

Фазовите траектории на нелинейните системи се различават значително от тези на линейните. При тях обикновено има повече от една особена точка. Освен това при някои системи върху фазовия портрет се наблюдават една или повече затворени криви, които се наричат гранични цикли. В нелинейните системи може да се установят автоколебания, чието изображение върху фазовата равнина съответстват устойчиви гранични цикли. Граничен цикъл се нарича изолирана затворена фазова траектория, т. е. такава траектория, при която достатъчно малка околност отсъстват други затворени траектории. Граничните цикли се различават от затворените траектории на консервативните системи. По-долу са показани някои от по характерните фазови траектории на нелинейни системи. На фиг. 12.16 е показан фазов портрет на система с така наречения устойчив граничен цикъл. Особената точка е една и съвпада с центъра на координатната система. При малки начални отклонения (условия) системата е неустойчива, изображаващата точка се движи по развиваща се спирали и се отдалечава от точката на покой по посока на затворената крива (граничния цикъл). При големи начални условия системата е устойчива-фазовата траектория е навиваща се по посока на особена точка спирали, доближаваща се към затворената крива.



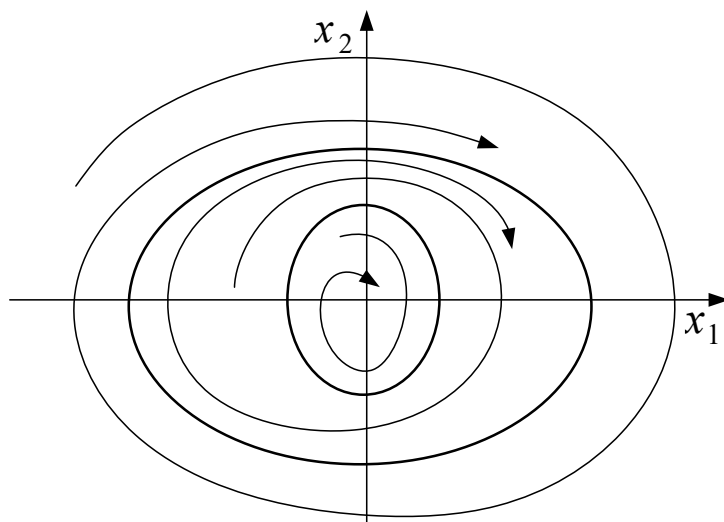
Фиг. 12.16. Устойчив граничен цикъл.

На фиг. 12.17 е показан случай с неустойчив граничен цикъл. Системата е устойчива при малки, но неустойчива при големи начални условия. Границата на началните условия, до които системата е устойчива има вид на неустойчив граничен цикъл от който и от двете страни се отдалечават спираловидните фазови траектории.



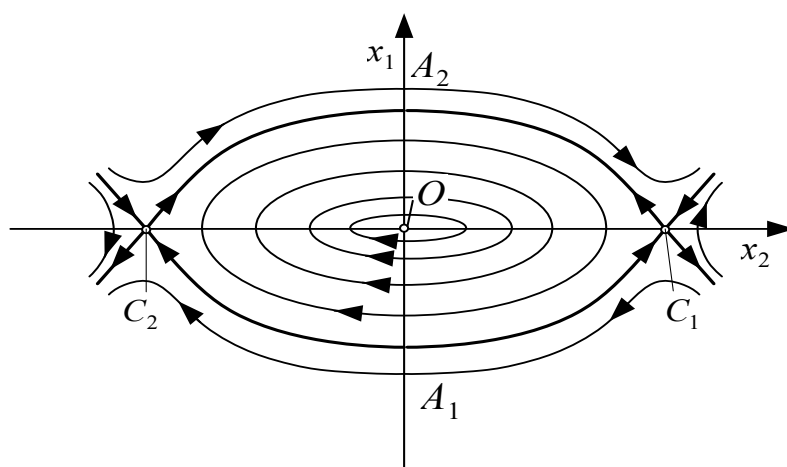
Фиг. 12.17. Неустойчив граничен цикъл.

На фиг. 12.18 е показан фазов портрет с два гранични цикъла - устойчив и неустойчив. Системата е устойчива при малки, неустойчива при средни и отново устойчива при големи начални условия.



Фиг. 12.18. Фазов портрет с два гранични цикъла - устойчив и неустойчив.

На фиг. 12.19 е показан случай на система отново с една особена точка - център на координатната система. При малки начални отклонения преходните процеси са периодични колебателни, а при големи-апериодични разходящи.



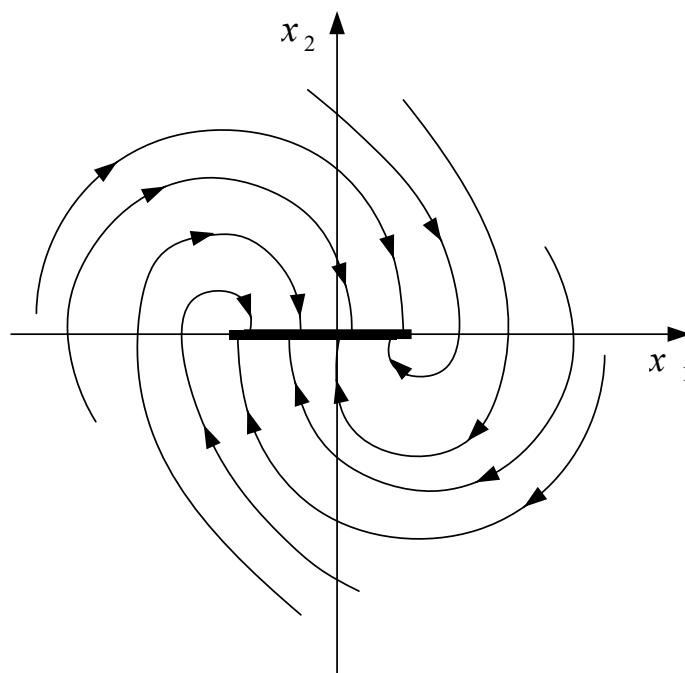
Фиг. 12.19. Фазов портрет на система с три особени точки

На фиг. 12.19 е показана система с три особени точки. Тук освен особената точка O от тип център има и две седлови точки C_1 и C_2 , което води до неустойчива система. Но може да съществува и устойчив граничен цикъл. Особените линии от такъв тип като $C_1A_1C_2$ и $C_2A_2C_1$ на фазовата равнина се наричат *сепаратриса*.

До тук бяха разгледани системи, които при малки отклонения могат да се разглеждат като линейни. Съвършено аналогична картина се получава и за такива нелинейни автоматични системи, които дори и при малки отклонения не могат да се разглеждат като линейни. Такива са релейните системи, със зона на

нечувствителност, с хистерезисни криви, със сухо триене, с луфт. Трябва да се отбележи, че някои от тези системи по-скоро при големи отклонения, отколкото при малки се доближават до линейните, когато зоната на нечувствителност или с луфт се оказват малки в сравнение с големината на отклонението.

В системите със зона на нечувствителност и със сухо триене, областта на застой, когато установеното състояние при дадени външни условия съответстват не на една точка, а на цяла област от възможни равновесни състояния на системата. Във фазовата равнина това особената точка се разтегля – *отрязък на покой* фиг. 12.20.



Фиг. 12.20. Фазов портрет с отрязък на покой

За координати във фазовата равнина могат да се избират не само отклонението на регулируемата величина и скоростта, а и различни други променливи, които еднозначно характеризират състоянието на системи от втори ред в произволен момент от времето.

Както е показал френският математик Поанкаре характера на фазовите траектории на нелинейна система в околността на особените точки зависи от това какви са корените на характеристичното уравнение на диференциалното уравнение в първо приближение на изходната нелинейна система. Приема се, че работата на нелинейната система се описва от системата от две уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + P(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + Q(x_1, x_2),\end{aligned}$$

където

$P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)$ - нелинейни функции на своите аргументи.
 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - постоянни коефициенти.

Уравненията в първо приближение на системата се записват:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2.\end{aligned}$$

След извършване на права Лапласова трансформация на горната система и известно преобразуване се достига до системата алгебрични уравнения

$$\begin{aligned}(s - a_{11})X(s)_1 - a_{21}X(s)_2 &= 0 \\ a_{12}X(s)_1 + (s - a_{22})X(s)_2 &= 0\end{aligned}$$

Характеристичното уравнение се намира от детерминантата

$$\begin{vmatrix} (s - a_{11}) & -a_{21} \\ a_{12} & s - a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

и има вид:

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

Когато корените на горното уравнение са реални отрицателни фазовият портрет на нелинейната система в близката околност на особената точка има вид като този при устойчив възел. За реални положителни корени - като на неустойчив възел, за два комплексно спрегнати корена с отрицателна реална част - като устойчив фокус, за два комплексно спрегнати с положителна реална част - като неустойчив фокус, за два реални с различни знаци - като седло, за два чисто имагинерни корена - като център или **фокус**.

Пример 12.5.

Уравненията описващи поведението на системата в динамичен режим са:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(x_2 - 2)(x_2 + 4) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(x_1^2 - 81)\end{aligned}.$$

Като се разделят двете уравнения едно на друго се получава диференциалното уравнение на фазовите траектории

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1(x_2 - 2)(x_2 + 4)}{x_2(x_1^2 - 81)},$$

където са означени с

$$X_1(x_1, x_2) = x_1(x_2 - 2)(x_2 + 4)$$

$$X_2(x_1, x_2) = x_2(x_1^2 - 81).$$

Уравнение е с отделящи се променливи. Това дава възможност да се запише:

$$\frac{(x_1^2 - 81)}{x_1} dx_1 = \frac{(x_2 - 2)(x_2 + 4)}{x_2} dx_2$$

и да се интегрират двете страни-

$$\int \frac{(x_1^2 - 81)}{x_1} dx_1 = \int x_1 dx_1 - \int \frac{81}{x_1} dx_1 = \frac{x_1^2}{2} - 81 \ln x_1 + c$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x_2 - 2)(x_2 + 4)}{x_2} dx_2 &= \int \frac{x_2^2 + 2x_2 - 8}{x_2} dx_2 = \\ &= \int x_2 dx_2 + \int 2 dx_2 - 8 \int \frac{dx_2}{x_2} + c_1 = \frac{x_2^2}{2} + 2x_2 - 8 \ln x_2 + c_1 \end{aligned}$$

Получава се решение от вида

$$\frac{x_1^2}{2} - 81 \ln x_1 = \frac{x_2^2}{2} + 2x_2 - 8 \ln x_2 + c_2,$$

което е уравнението на фазовите траектории на системата. Изчертаването на фазовите траектории за различни стойности на константата на интегриране в случая е по-трудно, тъй като и двете променливи x_1, x_2 са в неявен вид.

Особените точки на системата се определят от решението на системата алгебрични уравнения:

$$\begin{aligned} x_1(x_2 - 2)(x_2 + 4) &= 0 \\ x_2(x_1^2 - 81) &= 0 \end{aligned}.$$

Корените на уравненията са:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_2 = -4$$

$$x_2 = 0, x_1 = 9, x_1 = -9,$$

което определя координатите на пет особени точки

$$M_1(0,0), M_2(9,2), M_3(9,-4), M_4(-9,2), M_5(-9,-4).$$

За определяне вида на всяка от тях се записват уравненията в първо приближение на изходната нелинейна система:

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2$$

$$\frac{d\Delta x_2}{dt} = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2$$

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2$$

$$\frac{d\Delta x_2}{dt} = a_{21}\Delta x_1 + a_{22}\Delta x_2,$$

където

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = (x_2 - 2)(x_2 + 4), \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = x_1(2x_2 + 2)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 2x_2x_1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = x_1^2 - 81$$

За особената точка $M_1(0,0)$

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 = a_{11} = -8, \quad \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0 = a_{12} = 0$$

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)_0 = a_{21} = 0, \quad \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)_0 = a_{22} = -81$$

И уравненията в първо приближение са:

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = -8\Delta x_1 + 0.\Delta x_2$$

$$\frac{d\Delta x_2}{dt} = 0.\Delta x_1 - 81\Delta x_2.$$

Характеристичното уравнение се получава след известни преобразувания, показани по-горе.

$$L \left[\frac{d\Delta x_1}{dt} = -8\Delta x_1 + 0.\Delta x_2 \right]$$

$$sX_1(s) = -8X_1(s) - 0.X_2(s)$$

$$L \left[\frac{d\Delta x_2}{dt} = 0.\Delta x_1 - 81\Delta x_2 \right]$$

$$sX_2(s) = 0.X_1(s) - 81X_2(s)$$

$$\begin{vmatrix} s+8 & 0 \\ 0 & s+81 \end{vmatrix} = 0$$
$$(s+8)(s+81) = 0$$

Корените на уравнението са:

$$s_1 = -8, \quad s_2 = -81$$

Особената точка е устойчив възел.

Точка $M_2(9,2)$. Аналогично на предходното:

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 = a_{11} = 0, \quad \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0 = a_{12} = 54$$
$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)_0 = a_{21} = 36, \quad \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)_0 = a_{22} = 0$$

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = 0.\Delta x_1 + 54\Delta x_2$$

$$\frac{d\Delta x_2}{dt} = 36\Delta x_1 + 0.\Delta x_2$$

$$L \left[\frac{d\Delta x_1}{dt} = 0.\Delta x_1 + 54.\Delta x_2 \right]$$

$$sX_1(s) = 0.X_1(s) + 54X_2(s)$$

$$L \left[\frac{d\Delta x_2}{dt} = 36\Delta x_1 + 0.\Delta x_2 \right]$$

$$sX_2(s) = 36X_1(s) - 0.X_2(s)$$

$$\begin{vmatrix} s & -54 \\ -36 & s \end{vmatrix} = 0$$

$$s^2 - 1944 = 0$$

$$s_{12} = \pm \sqrt{1944}$$

Особената точка е от типа седло.

$$M_3(9,-4)$$

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 = a_{11} = 0, \quad \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0 = a_{12} = -54$$
$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)_0 = a_{21} = -72, \quad \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)_0 = a_{22} = 0$$

$$\begin{vmatrix} s & 54 \\ 72 & s \end{vmatrix} = 0$$

$$s^2 - 3888 = 0$$

$$s_{12} = \pm \sqrt{3888}$$

Седло

$$M_4(-9, 2)$$

$$\begin{vmatrix} s & 54 \\ 36 & s \end{vmatrix} = 0$$

$$s^2 - 1944 = 0$$

$$s_{12} = \pm \sqrt{1944}$$

Седло

$$M_5(-9, -4)$$

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \right)_0 = a_{11} = 0, \quad \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right)_0 = a_{12} = 54$$

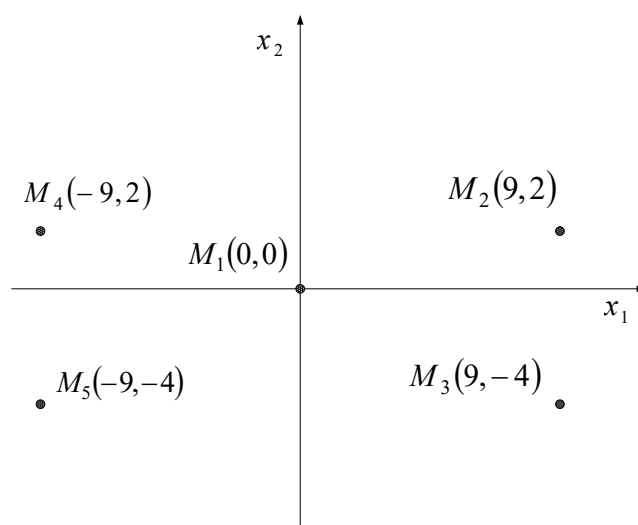
$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)_0 = a_{21} = 36, \quad \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)_0 = a_{22} = 0$$

$$\begin{vmatrix} s & -54 \\ -36 & s \end{vmatrix} = 0$$

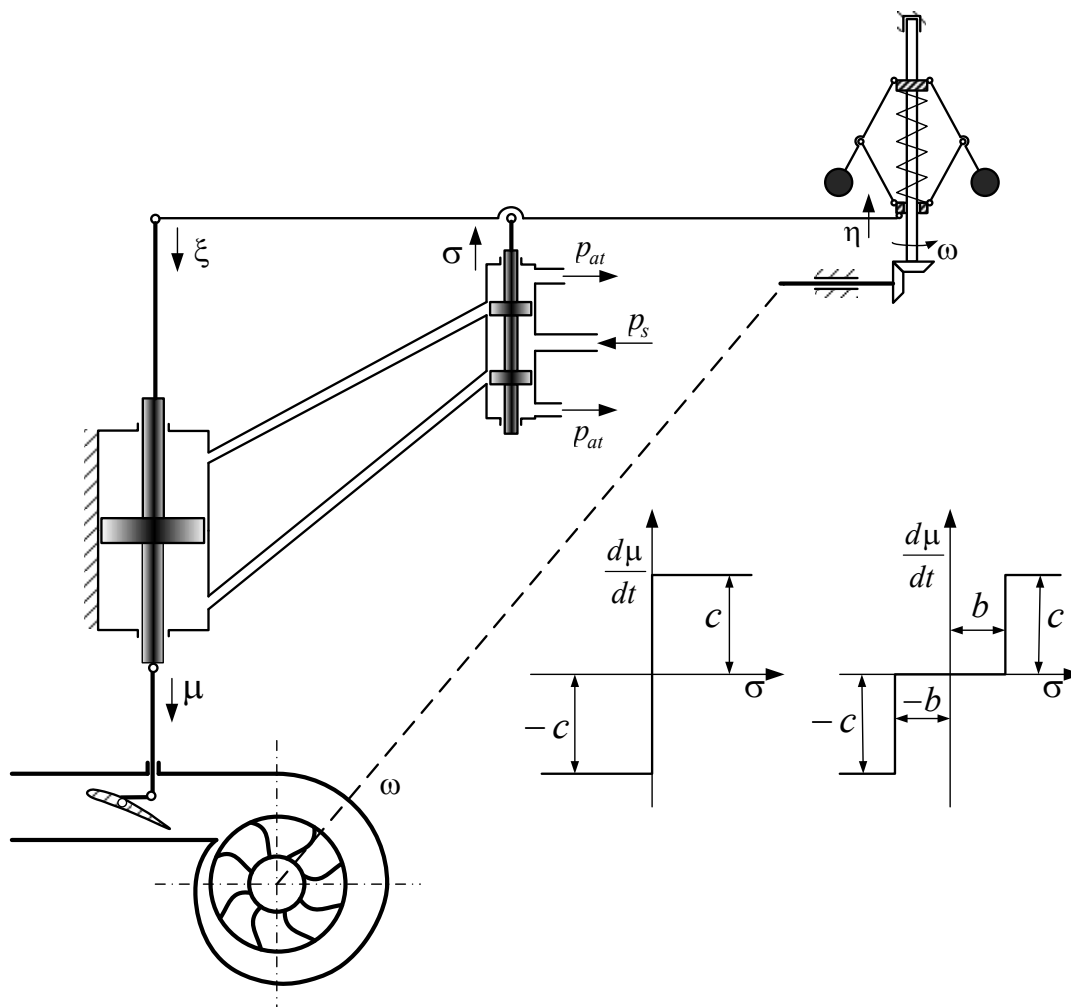
$$s^2 - 1944 = 0$$

$$s_{12} = \pm \sqrt{1944}$$

Седло



Фиг. 12.21. Особени точки за примера



Фиг. 12.22. САР на оборотите на водна турбина

Пример 12.6.

Уравненията описващи поведението на система за автоматично регулиране оборотите на въртене на водна турбина – фиг. 12.22. са следните:

-Уравнения на автоматичния регулатор

1. Уравнение на чувствителния елемент

$$\delta\eta + \varphi = 0$$

$\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ - относително изменение на оборотите на турбината/чувствителния

елемент – регулируема величина.

η - преместване на чувствителния елемент

δ - коефициент

2. Уравнение на разпределителното устройство

$$\sigma = \eta - \xi$$

σ - преместване на плунжера на управляващия разпределител

ξ - преместване на лоста на твърдата обратна връзка

3. Уравнение на сервомотора

$$\frac{d\mu}{dt} = c \operatorname{sign} \sigma$$

μ - преместване на буталото на изпълнителния хидроцилиндър-сервомотора

4. Уравнение на обратната връзка

$$\xi = \mu$$

-Уравнение на водната турбина

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} = \mu.$$

T_a - времеконстанта на турбината

Ако се въведат фазови координати по схемата:

$$\varphi = x$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = y,$$

След известни преобразувания

$$\sigma = -\frac{\varphi}{\delta} - T_a \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{x}{\delta} - T_a y$$

$$\mu = T_a y.$$

При мигновено превключване при преход на управляващия елемент през неутралното положение $\sigma = 0$ се получава

$$y = -\frac{1}{\delta T_a} x,$$

което съответства на правата AB на фиг. на фазовата равнина, като при стойностите $\sigma > 0$ са частта в равнината на ляво на правата AB , а при $\sigma < 0$ от дясната страна.

За определяне на фазовите траектории се вземат основните уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$T_a \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\mu}{dt} = c \operatorname{sign} \sigma$$

които се заместват едно в друго и се получава:

$$T_a \frac{dy}{dt} = c \operatorname{sign} \sigma$$

$$T_a \frac{dy}{dx} = \frac{c}{y} \operatorname{sign} \sigma,$$

което е диференциалното уравнение на фазовите траектории.

За $\sigma > 0$

$$T_a \frac{dy}{dx} = \frac{c}{y}$$

$$T_a y dy = c dx$$

и след интегриране се получава:

$$T_a y^2 = cx + C_1,$$

което представлява фамилия от параболи с различна стойност на константата C_1 . Тези параболи са наляво то линията AB и са симетрични относно оста x .

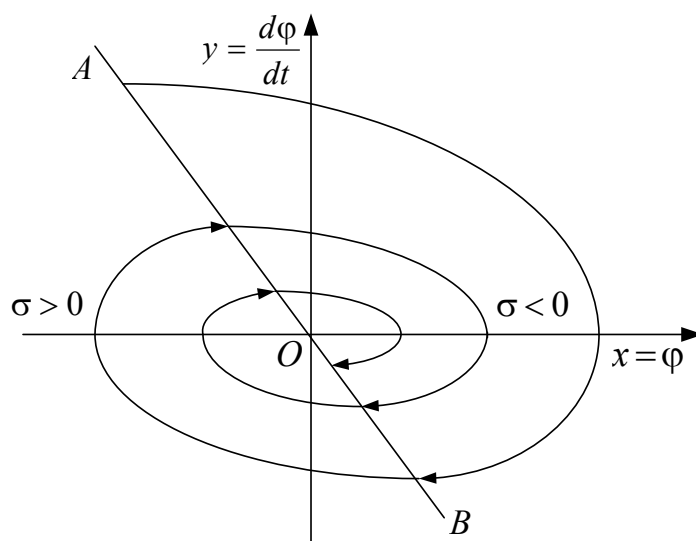
За $\sigma < 0$ аналогично на горното

$$T_a \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{y}$$

$$T_a y dy = -c dx$$

$T_a y^2 = -cx + C_2$, което е също фамилия от параболи.

Фазовият портрет на системата се получава чрез съвместяване на решенията за $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ и е показан на фиг. 12.23. Очевидно се получава устойчива система със затихващ колебателен преходен процес.



Фиг. 12. 23. Фазов портрет на системата от пример 12.6.

Разглежда се същата система, но се отчита мъртвата зона в разпределителното устройство. В този случай превключването /при $\sigma = -b$ $\sigma = +b$ / става по две наклонени линии

$$x = -\delta T_a y + b\delta \quad x = -\delta T_a y - b\delta$$

Между тези прави $|\sigma| < b$, на дясно от тях $\sigma < -b$, на ляво от тях $\sigma > -b$

При $|\sigma| < b$ се получава

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \frac{dx}{dt} = y$$

От където уравнението на фазовите траектории се получава:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad y = C_3 = \text{const}$$

Това са прави линии успоредни на оста x в полосата AB .

При $\sigma > b$

$$y = -\frac{1}{\delta T_a} x - \frac{b}{T_a}$$

$$T_a y^2 = cx + C_1$$

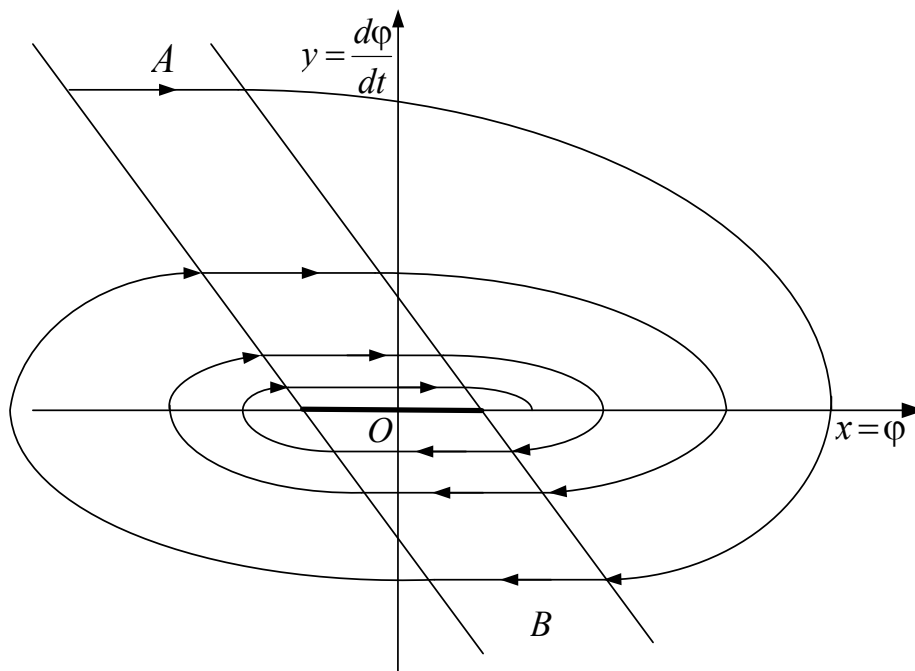
$$T_a \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{y}$$

При $\sigma < 0$

$$y = -\frac{1}{\delta T_a} x + \frac{b}{T_a}$$

$$T_a y^2 = -cx + C_2$$

Системата е отново устойчива и има колебателен преходен процес, но вместо особена точка се получава особен отрязък / $y = 0$, $-b\delta < x < b\delta$ / т. е. установеното състояние се определя нееднозначно – фиг. 12.24. Регулаторът може да се намира в равновесие в произволно място вътре в зоната на нечувствителност /мъртвата зона/.



12. 24. Фазов портрет на системата от пример 12.6.

12.10. Авто-колебания в нелинейни системи

Понякога, след затихване на динамичния /преходния/ процес в реалните системи за автоматично управление, при някои от тях се появяват незатихващи периодични движения, които се наричат автоколебания – фиг.12.25, по характерните признаци, на които са:

1. Първия признак за това, че дадено незатихващо колебание е автоколебание е отсъствие на периодично външно въздействие – автоколебанията са собствени колебания на системата. Незатихващи колебания без наличие на външно въздействие може да съществуват и в консервативна система, в която няма постъпване и загуба на енергия. Автоколебанията се отличават от свободните колебания на консервативната система и възникват само в съществено неконсервативни системи, към които се отнасят системите за автоматично регулиране. Автоколебанията се поддържат за сметка на равенството на загубите на енергия по време на колебателния цикъл и потока на енергия от неколебателен източник. Такъв източник на енергия в САР служи обекта на регулиране или усилвателя. Системата, която извършва колебателно движение, само управлява притока на енергия от този източник.

2. Формата и честотата на автоколебанията, които възникват винаги при отсъствие на външно периодично въздействие се определят от свойствата на самата система. За разлика от това, формата и честотата на принудените колебания съществено зависят от формата и честотата на външното периодично въздействие. Свободните колебания на консервативните системи също стават при отсъствие на външно периодично въздействие, но амплитудата и честотата

им зависят от началните условия. Например, идеалното махало се колебае с толкова по-голяма амплитуда, колкото е по-голямо началното отклонение. При автоколебанията формата и честотата им не зависи от началните условия. Автоколебанията, които се установяват в определена система след затихване на преходните процеси, могат да се изменят само чрез изменението на параметрите на системата, т. е. на коефициентите на уравненията на движение.

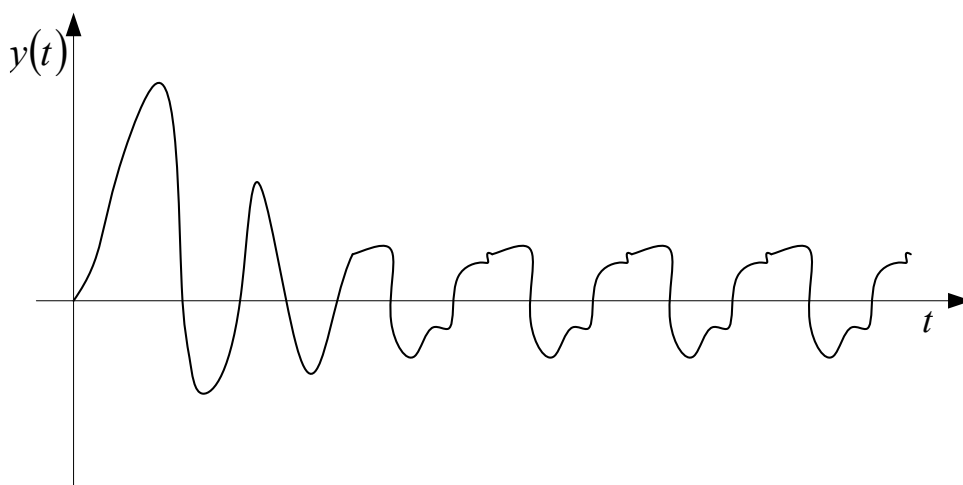
3. Характерна особеност на автоколебанията е обстоятелствата, че те обикновено не изчезват при достатъчно малки изменения от началните условия и параметри на системата. Ако съществуват автоколебания, то те съществуват за цялата област от начални отклонения. Ако възникнат автоколебания при определени стойности на параметрите на системата, то те възникват и при други, близки до тях стойности на параметрите, като се променят незначително по форма и честота.

4. Пренастройката на някои от параметрите на системата /обикновено на автоматичния регулатор/ не водят до затихване на колебанията, а само променят незначително тяхната форма и честота.

Автоколебанията са периодични движения, които се изобразяват във фазовата равнина с устойчив граничен цикъл. Устойчивия граничен цикъл отразява характерните особености на автоколебанията:

- Наличие на стационарни колебания без външно периодична сила
- Независимост на формата и честотата на тези колебания от началните условия
- Устойчивост на периодичното решение по отношение на достатъчно малко изменение на началните условия и параметри на системата

Изучаването на автоколебанията е съществено, защото повечето системи за автоматично регулиране могат да работят като системи за стабилизация и като автоколебателни системи.



Фиг. 12. 25 Автоколебания в нелинейна система

12.11. Метод на хармонична линеаризация

Тук се излага методът на хармонична линеаризация за приближено определяне на периодичните движения /автоколебания/ и устойчивост на нелинейни системи от произволен ред.

Сложността и трудоемкостта на точните методи за пресмятане на нелинейните системи ограничават възможностите за тяхното използване. За това по-голямо практическо значение имат приближените методи, които позволяват да се пресмятат нелинейни системи от произволен вид.

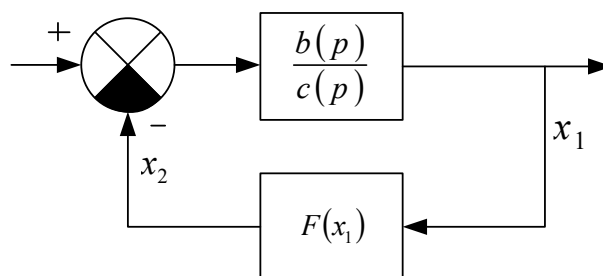
Най-голяма разпространение имат приближените методи за определяне на периодичните режими в нелинейните системи.

Определянето на периодичните процеси в САР представляват съществен интерес. Ако системата има устойчиви стационарни колебания, а равновесното състояние е неустойчиво, то такава система е практически неработоспособна. При пресмятането ѝ е важно да се определят условията на отсъствие на периодични движения. При други системи, обаче периодичните режими са нормални работни режими и в такъв случай е важно да се определят параметрите на периодичните режими.

В повечето случаи приближените методи за търсене на периодично решение в нелинейните системи са основани на допускането, че търсеното решение има синусоидална или близка до синусоидална форма. В нелинейните системи периодичните решения са винаги несинусоидални, но са близки до синусоида.

Хармонична линеаризация

Предполага се, че системата се състои от линейна част с определено диференциално уравнение /предавателна функция/ и нелинейна част, с известна статична характеристика – фиг. 12.26.



Фиг. 12. 26. Структурна схема на система с нелинейно звено

Диференциалното уравнение на линейната част на системата се записва:

$$c(p)x_1(t) + b(p)x_2(t) = 0, \quad (12.42)$$

а статична характеристика на нелинейното звено чрез уравнението.

$$x_2(t) = F[x_1(t)]. \quad (12.43)$$

Предполага се, че на линейната част на системата се подава несинусоидално периодично въздействие. Това въздействие може да се разложи в тригонометричен ред на Фурие. Обикновено линейната част на системата служи като *филтър на високочестотните колебания* – амплитудата на висшите хармоници на входния сигнал при преминаване през линейната част се намаляват многократно, вследствие на което висшите хармоници могат да се пренебрегнат, като остане само първия хармоник – т. е. синусоидата. Във всеки конкретен случай това свойство на системата може да се провери по АФЧХ на линейната част. Ако големината на вектора на АФЧХ в областта на високите честоти е малка, то линейната част служи за филтър на колебанията с тези честоти. Колкото по-интензивно си филтрират висшите хармоници, толкова повече е оправдано допускането за синусоидалната форма на периодичното движение на изхода на линейната част на системата.

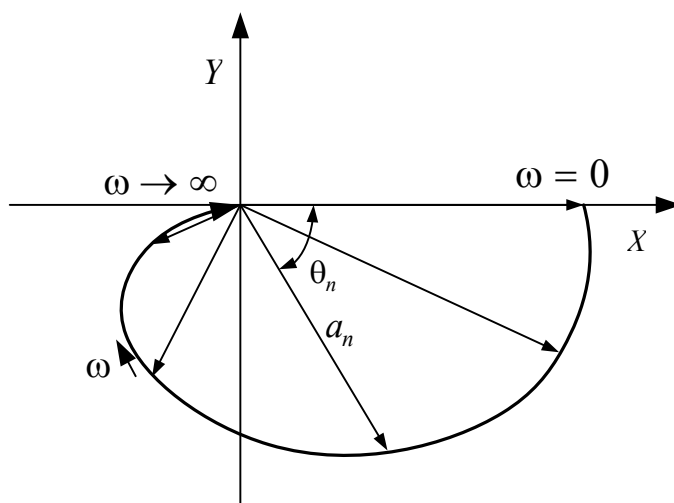
Указаното свойство на автоматичните системи е физическо основание за приложение на приближените методи за определяне на периодичните решения в тези системи, както синусоидални движения.

Приема се, че в системата възникват автоколебания, с форма различна от синусоидалната, но близка до нея. В приближение колебанията могат да се запишат математически чрез израза:

$$x_1 = a \sin(\omega t), \quad (12.44)$$

където: a, ω - неизвестни за сега амплитуда и честота на колебанията.

Приемането, че формата на колебанията е близка до синусоидалната е допустимо само при условие, че линейната част на системата е филтър за висшите хармоници преминаващи през нея. Това означава, че преминавайки през линейната част на системата амплитудите на висшите хармоници се намаляват многократно. За да се установи дали линейната част на системата е филтър за висшите хармоници преминаващи през нея е необходимо да се построи нейната амплитудно-фазова характеристика - фиг.12.27



Фиг. 12.27. Амплитудно фазова характеристика

Ако горното условие се изпълнява, то на входа на нелинейното звено ще постъпва синусоиден сигнал, а на изхода му ще се формира периодичен сигнал с определена форма, зависеща от вида на нелинейността и основна честота съвпадаща с тази на входния сигнал. Следователно ако съществува периодично решение x_1 то и функцията $x_2(t) = F[x_1(t)]$ ще бъде също периодична с период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, който се определя от честотата ω на предполагаемото решение (12.44).

Известно е, че всеки периодичен сигнал може да бъде разложен в ред на Фурие, посредством зависимостта:

$$x_2(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k \omega t) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k \omega t), \quad (12.45)$$

където: a_k и b_k са константи, определящи се по формулите.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T F[x_1(t)] \cos(k \omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T F[x_1(t)] \sin(k \omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F[x_1(t)] dt$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Константата a_0 е равна на нула за симетрични и различна от нула за несиметрични нелинейности.

Тъй като амплитудите на висшите хармоници се намаляват многократно при преминаване на сигнала през линейната част на системата, то за формирането на изходния сигнал принос ще имат само съставките съдържащи основния хармоник ω .

$$x_2(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \quad (12.46)$$

/приема се a_0 равно на нула – симетрична/. Производната по времето на x_1 се записва:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt} [a \sin(\omega t)] = a \omega \cos(\omega t), \quad (12.47)$$

откъдето след намиране на

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{a \omega} \frac{dx_1}{dt} \quad (12.48)$$

и заместване в (12.102) се изразява променливата x_2 чрез x_1

$$x_2(t) = \frac{b_1}{a} x_1(t) + \frac{a_1}{a\omega} \frac{dx_1(t)}{dt}. \quad (12.49)$$

Ако се въведат нови коефициенти $q(a)$ и $q_1(a)$ чрез съотношенията:

$$q_1 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F[a \sin(\omega t)] \cos(\omega t) dt; \quad a_1 = a q_1(a) \quad (12.50)$$

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F[a \sin(\omega t)] \sin(\omega t) dt; \quad b_1 = a q(a) \quad (12.51)$$

се получава:

$$x_2(t) = q(a) x_1(t) + \frac{q_1(a)}{\omega} \frac{dx_1(t)}{dt} \quad (12.52)$$

или в символически вид

$$x_2(t) = \left[q(a) + p \frac{q_1(a)}{\omega} \right] x_1(t). \quad (12.53)$$

Особеното в случая е това, че коефициентите $q(a)$ и $q_1(a)$ са функции на неизвестните за сега амплитуда a и честота ω на колебанията и се наричат *коефициенти на хармонична линеаризация*, а уравнението на нелинейното звено се записва като линейно.

Уравнението (12.53) е линейно за разлика от уравнението (12.44). Извършена е *хармонична линеаризация*, а коефициентите $q(a)$ и $q_1(a)$ се наричат *коефициенти на хармоничната линеаризация*.

Изчисляването на интегралите (12.50) и (12.51) за конкретна функция не е сложно. В практиката се използват таблици за коефициентите на хармонична линеаризация, намиращи се в специализираната литература. В частност за идеална релейна характеристика коефициентите на хармонична линеаризация са:

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a}; \quad q_1(a) = 0 \quad (12.54)$$

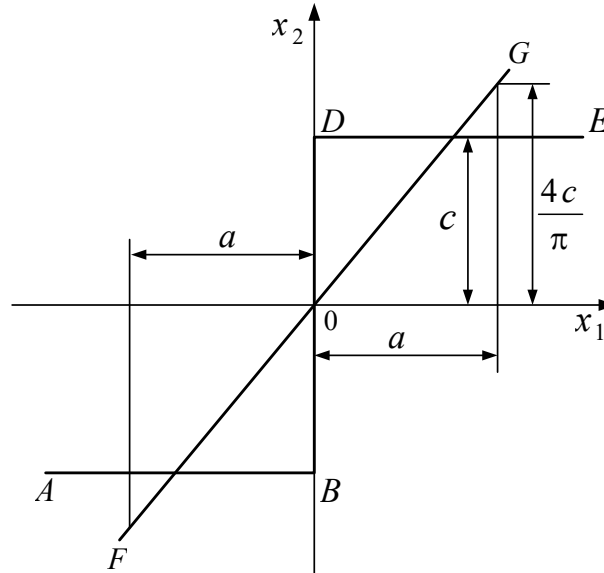
където c - стойността на x_2 съгласно релейната характеристика при $x_1 > 0$.

Следователно хармонично линеаризираното уравнение в дадения случай ще е:

$$x_2(t) = \left[\frac{4c}{\pi a} \right] x_1(t) \quad (12.55)$$

От фиг. 12.28 следва, че при хармонична линеаризация на идеална релейна характеристика начупената линия $ABDE$ се заменя с правата линия FG ,

наклонена под такъв ъгъл, че тази права приближено заменя този участък от начупената линия, която се обхваща от колебанията с дадена амплитуда a . От тук става понятна обратната пропорционалност на зависимостта на $q(a)$ от a , във формулата (12.54), колкото е по-голяма амплитудата a на колебание на входната величина, толкова по-полегата трябва да е правата линия FG , заменяща начупената линия $ABDE$.



Фиг. 12.28. Хармонична линеаризация на идеална релейна характеристика

Определяне на амплитудата и честотата на периодичното решение

При фиксирани стойности на амплитудата a и честота ω , съответстващи на някакво периодично решение системата

$$c(p)x_1(t) + b(p)x_2(t) = 0, \quad (12.56)$$

$$x_2(t) = \left[q(a) + p \frac{q_1(a)}{\omega} \right] x_1(t).$$

представлява линейна система с постоянни коефициенти. Такава система ще има периодично решение тогава и само тогава когато тя се намира на границата на устойчивост, т. е. когато в корените на характеристичното уравнение има чисто имагинерни корени.

След изключване на променливата $x_2(t)$ от уравнения (12.112) се получава диференциалното уравнение на затворената система:

$$\left\{ c(p) + b(p) \left[q(a) + p \frac{q_1(a)}{\omega} \right] \right\} x_1(t) = 0 \quad (12.57)$$

В изображение по Лаплас горното се записва:

$$\left\{ c(s) + b(s) \left[q(a) + s \frac{q_1(a)}{\omega} \right] \right\} X_1(s) = 0 \quad (12.58)$$

Характеристичното уравнение е

$$a(s) = c(s) + b(s) \left[q(a) + s \frac{q_1(a)}{\omega} \right]. \quad (12.59)$$

Ако може да се намерят такива положителни реални числа $a = a^*$ и $\omega = \omega^*$ при които характеристичното уравнение (12.59) да има чисто имагинерни корени, то периодичното решение $x_1 = a \sin(\omega t)$ съществува. Ако не могат да се намерят такива числа – системата няма периодично решение. Може да се окаже, че има няколко стойности на $a = a^*$ и $\omega = \omega^*$ при които уравнението (12.59) има чисто имагинерни корени, то тогава системата има няколко периодични решения.

Като се положи

$$s = i\omega$$

се получава честотната функция

$$a(i\omega) = c(i\omega) + b(i\omega) \left[q(a) + i\omega \frac{q_1(a)}{\omega} \right]. \quad (12.60)$$

След отделяне на реалната от имагинерната части

$$a(i\omega) = X(\omega, a) + iY(\omega, a) = 0 \quad (12.61)$$

и полагане на нула

$$X(\omega, a) = 0 \quad (12.62)$$

$$Y(\omega, a) = 0$$

се получава система от две алгебрични уравнения, от които се определят съответен брой решения за двойката a, ω . От значения са само реалните положителни стойности на решението. За да се установи дали някои от тези решения съответстват на авто-колебания в системата се формира детерминантата Δ

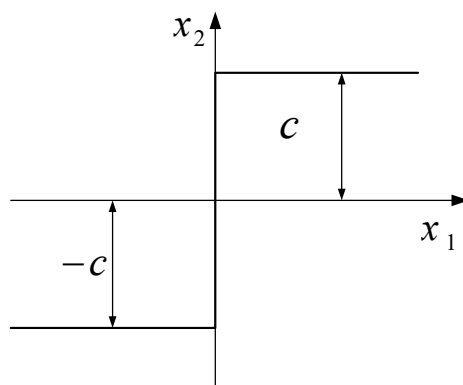
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial \omega} \\ \frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial \omega} \end{vmatrix}. \quad (12.63)$$

Решения са тази двойка стойности, за която знакът на Δ е положителен.

Пример 12.7: Известна е предавателната функция на линейната част на затворената система

$$W(s) = \frac{k_1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Характеристиката на нелинейното звено включено в системата е релейна:



Фиг. 12.29. Характеристика на нелинейно звено към пример 12.7

Коефициентите на хармонична линеаризация на нелинейното звено имат стойности

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a}, \quad q_1(a) = 0.$$

Характеристичното уравнение на затворената система има вид:

$$s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 \frac{4c}{\pi a} = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k_1 \frac{4c}{\pi a} = 0$$

Ако се положи в уравнението $s = i\omega$, за реалната и имагинерна част на получената комплексна функция се записва:

$$X(\omega, k_1, T_1) = k_1 \frac{4c}{\pi a} - \omega^2(T_1 + T_2)$$

$$Y(\omega, k_1, T_1) = \omega - \omega^3 T_1 T_2.$$

От второто уравнение на горната система се определя:

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}$$

и след заместване в първото

$$a = k_1 \frac{4c T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)}.$$

Получените стойности на a и ω са реални положителни числа. За да се установи дали те съответстват на амплитудата и честотата на вероятните автоколебания възникващи в системата се определя знака на детерминантата съставена от частните производни на реалната и имагинерна части на комплексната функция:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial \omega} \\ \frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial \omega} \end{vmatrix}.$$

В случая

$$\frac{\partial X}{\partial a} = -k_1 \frac{4c}{\pi a^2}, \quad \frac{\partial X}{\partial \omega} = -2\omega (T_1 + T_2)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \omega} = 1 - 3\omega^2 T_1 T_2.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -k_1 \frac{4c}{\pi a^2} & -2\omega (T_1 + T_2) \\ 0 & 1 - 3\omega^2 T_1 T_2 \end{vmatrix} = -k_1 \frac{4c}{\pi a^2} (1 - 3\omega^2 T_1 T_2) = k_1 \frac{4c}{\pi a^2} (3\omega^2 T_1 T_2 - 1).$$

След заместване на a, ω в горното уравнение се установява, че знакът на детерминантата е положителен

$$\Delta = \frac{\pi(T_1 + T_2)}{2k_1 c T_1^2 T_2^2} > 0,$$

тъй като всички величини в израза са реални положителни числа. Следователно в системата ще възникват авто-колебания с амплитуда и честота определени от решенията.

11.12. Преходни процеси възникващи в нелинейни системи. Оценка на качеството на нелинейните преходни процеси

За линейни системи колебателните преходни процеси при които показателя на затихване $\zeta = \text{const}$ и честота $\omega = \text{const}$ колебанията се записват

$$x(t) = a_0 e^{\zeta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (12.64)$$

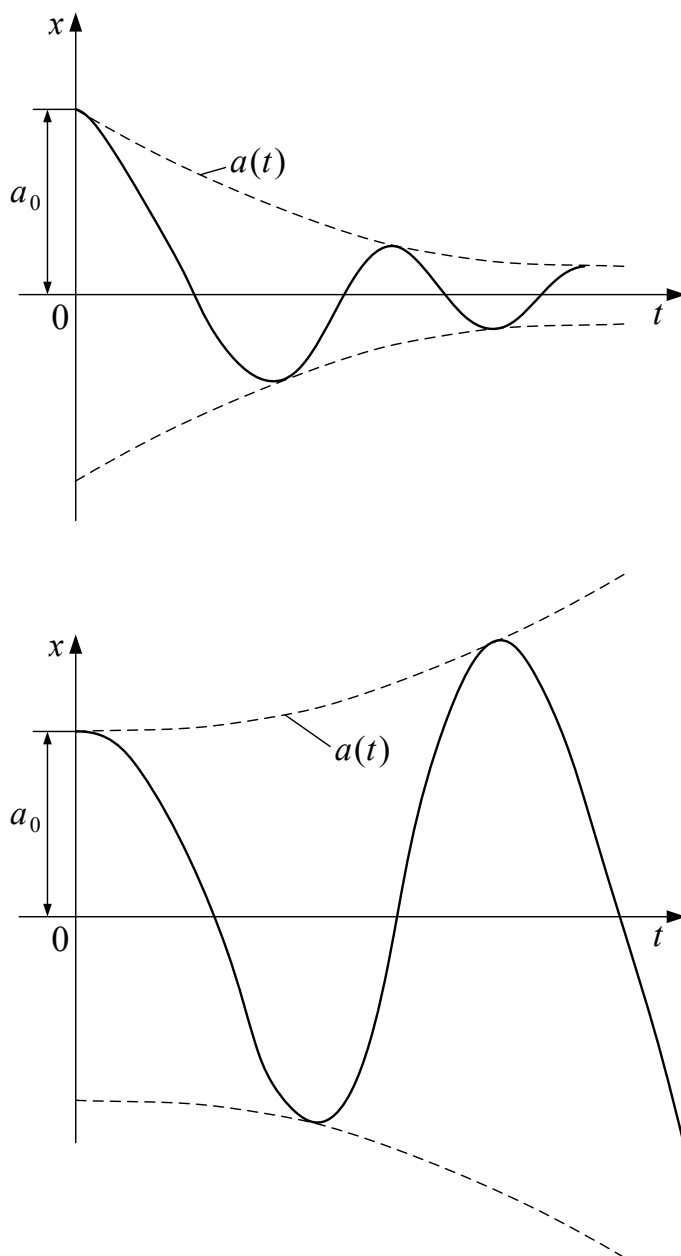
Предполага се, че преходните процеси протичащи в нелинейните системи са периодични, затихващи или разходящи, с променливи във времето амплитуда a и аргумент ψ /честота ω / на колебанията – фиг. 12.30.

$$x(t) = a(t) \sin \phi(t), \quad (12.65)$$

където

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \phi_0, \quad (12.66)$$

ϕ_0 - началната /постоянна/ фаза.



Фиг. 12.30. Бавно променящи се във времето колебателни преходни процеси

При променлив във времето показател на затихването трябва да се определи текущата стойност на амплитудата във вид на диференциална зависимост.

$$\frac{da(t)}{dt} = a\xi(t) \quad (12.67)$$

или

$$\frac{da(t)}{a} = \xi(t)dt \rightarrow a(t) = a_0 e^{\int_0^t \xi(t)dt}, \quad (12.68)$$

$\xi(t)$ - показател на затихване на амплитудата.

Приема се отново, че системата се състои от линейна част с определено диференциално уравнение /предавателна функция/, притежаваща свойството да

филтрира висшите хармоници и нелинейна, с известна статична характеристика.

След развитие в ред на Фурие и пренебрегване на висшите хармоници уравнението на нелинейното звено се записва:

$$x_2(t) = a_1 \cos \phi(t) + b_1 \sin \phi(t) = a(t)q(a)\cos \phi(t) + a(t)q_1(a)\sin \phi(t) \quad (12.69)$$

След диференциране на (12.69) по времето се получава:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \sin \phi(t) + a(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \cos \phi(t). \quad (12.70)$$

Като се имат предвид зависимостите (12.67) и (12.68) горното уравнение добива вид:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a(t)\xi(t)\sin \phi(t) + a(t)\omega(t)\cos \phi(t) = \xi(t)x_1(t) + a(t)\omega(t)\cos \phi(t) \quad (12.71)$$

от което се определя

$$a(t)\cos \phi(t) = -\frac{1}{\omega(t)} \xi(t)x_1(t) + \frac{1}{\omega(t)} \frac{dx_1(t)}{dt} \quad (12.72)$$

$$x_2(t) = a_1 \cos \phi(t) + b_1 \sin \phi(t) = q_1(a) \left[-\frac{1}{\omega(t)} \xi(t)x_1(t) + \frac{1}{\omega(t)} \frac{dx_1(t)}{dt} \right] + q(a)x_1(t) \quad (12.73)$$

За опростяване на записа, по-нататък величините ще се записват само a, ξ, ω .

$$x_2(t) = \left[-q_1(a) \frac{1}{\omega} \xi + q(a) \right] x_1(t) + q_1(a) \frac{1}{\omega} \frac{dx_1(t)}{dt}. \quad (12.74)$$

Ако се преобразува по Лаплас горното диференциално уравнение се получава:

$$X_2(s) = \left[q(a) + q_1(a) \frac{s - \xi}{\omega} \right] X_1(s) \quad (12.75)$$

11.13. Диаграми на качеството на системите

Ако се изключи от уравнения (12.74) и (12.74) за изображението на променливата $x_2(s)$ се записва:

$$\left\{ c(s) + b(s) \left[q(a) + q_1(a) \frac{s - \xi}{\omega} \right] \right\} X_1(s) = 0. \quad (12.76)$$

Характеристичното уравнение на затворената система е:

$$c(s) + b(s) \left[q(a) + q_1(a) \frac{s - \xi}{\omega} \right] = 0. \quad (12.77)$$

При предположението за периодични колебания в системата, корените на характеристичното уравнение на затворената система са от вида: $s = \xi + i\omega$.

Ако се замести горното в уравнение (12.74) се получава комплексното уравнение

$$c(\xi + i\omega) + b(\xi + i\omega)[q(a) + iq_1(a)] = 0. \quad (12.78)$$

Забележка: Когато характеристичното уравнение на системата е от висока степен заместването $s = \xi + i\omega$ може да стане, като полиномите $c(s)$ и $b(s)$ се развият в степенни редове, по степените на ξ или $i\omega$, например:

$$c(\xi + i\omega) = c(\xi) + \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \right)_0 i\omega + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \right)_0 (i\omega)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 c}{\partial \xi^3} \right)_0 (i\omega)^3 + \dots, \quad (12.79)$$

и се вземат само първите два или три члена от развитието.

След отделяне на реалната и имагинерна части на уравнението се получава:

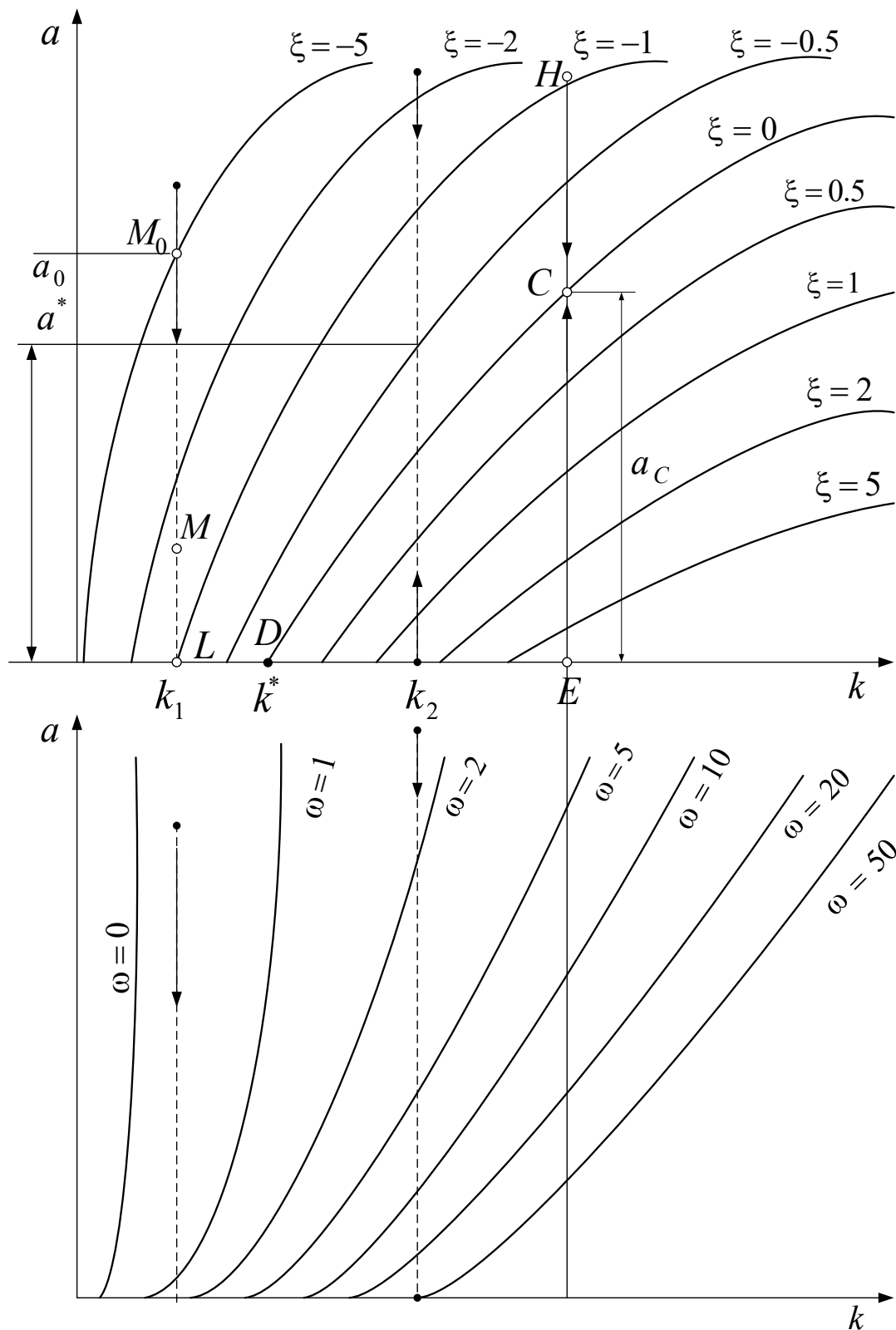
$$X(\xi, \omega, a) = 0 \quad (12.80)$$

$$Y(\xi, \omega, a) = 0 \quad (12.81)$$

Приема се, че k е някакъв параметър на настройка на системата, от който зависят част от константите в характеристичното уравнение на затворената система. Следва, че и реалната и имагинерна части на комплексното уравнение ще бъдат функции на този параметър:

$$X(\xi, \omega, a, k) = 0 \quad (12.82)$$

$$Y(\xi, \omega, a, k) = 0. \quad (12.83)$$



Фиг. 12. 31 Диаграми на качеството

От горните две уравнения може да се определи изменението на амплитудата на колебанията a на процеса във функция от параметъра на настройка k при фиксирани стойности на показателя ξ на затихване или честотата на колебанията ω на системата:

$$a = a(k, \xi) \quad (12.84)$$

$$a = a(k, \omega). \quad (12.85)$$

Построяват се фамилия от криви $a = a(k)$ за $\xi = \text{const}$ и $a = a(k)$ за $\omega = \text{const}$ – фи12.31.

Тези графични зависимости се наричат диаграми на качеството на системата. По тях може да се съди за характера на всички възможни преходни процеси възникващи в системата и как се променят амплитудата, честотата и показателя на затихване на процеса, дали той е затихващ или разходящ и дали в системата възникват авто-колебания.

За линейни системи линиите $a = a(k)$ за $\xi = \text{const}$ и $a = a(k)$ за $\omega = \text{const}$ ще имат вид на вертикални прави линии, тъй като показателя на затихването и честотата на колебанията не зависят от амплитудата на колебание, а се променят само при изменение на параметрите на системата – в случая на параметъра k . При нелинейните системи тези линии се изкривяват или просто се наклоняват в зависимост от формата на нелинейността и от общата структура на системата. Това изразява изменението на показателя на затихване ξ и честотата на нелинейните колебателни преходни процеси при изменение на големината на амплитудата a .

Стойността $\xi = 0$ съответства на незатихващ процес, т. е запазване на постоянна амплитуда на колебанията. Например на точката С съответстват колебания с постоянна амплитуда a_C – автоколебания. При $\xi > 0$ са разходящи колебателни, а при $\xi < 0$ затихващи.

Протичането на преходния процес във времето съответства на движението на изобразяващата точка М по вертикалата, защото амплитудата a в преходния процес се променя, а коефициента k остава постоянен. Например стойността на $k = k_1$ в точка L съответства на вертикалната линия M_0L . Тъй като тази права пресича линии със отрицателни стойности на показателя на колебателност $\xi < 0$, то преходния процес ще е затихващ колебателен – при начална амплитуда a_0 . Изменението на честотата се определя по вертикалната линия в долната част на диаграмата.

Ако параметъра k има стойност съответстваща на точка Е се получават два варианта на преходен процес. Ако началното положение на изобразяващата точка е под точката С / $a_0 < a_C$ / то $\xi > 0$ и процеса е разходящ колебателен и изобразяващата точка се движи по линията ЕС като се доближава асимптотично до точка С. Ако $a_0 > a_C$ то изобразяващата точка се движи по линията НС надолу и процесът е колебателен затихващ.

На показаните по-горе диаграми се вижда, че до някакви стойности на параметъра на настройка k^* точка D преходните процеси ще са затихващи

апериодични или колебателни, а при увеличаване на неговата стойност системата ще бъде неустойчива при малки, но устойчива при големи начални условия и ще възникват авто-колебания с определена амплитуда и честота, чиято големина ще зависи от стойността на параметъра k .

Наляво от линията $\omega = 0$ лежат монотоните преходни процеси /без колебания/.

Пример 12.8. за построяване диаграми на качеството.

Приема се отново като изходна структурната схема от фиг. 12.26 с предавателна функция на линейната част 1(2.42) и характеристика на нелинейното звено (12.43).

Като се има предвид казаното по-горе за характеристичното уравнение на затворената система се записва:

$$c(s) + b(s) \left[q(a) + q_1(a) \frac{s - \xi}{\omega} \right] = 0$$

и след заместване

$$s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 \frac{4c}{\pi a} = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k_1 \frac{4c}{\pi a} = 0.$$

Полага се $s = \xi + i\omega$ и се получава:

$$T_1 T_2 (\xi + i\omega)^3 + (T_1 + T_2) (\xi + i\omega)^2 + \xi + i\omega + k_1 \frac{4c}{\pi a} = 0.$$

Реалната и имагинерни части се записват съответно:

$$X(\xi, \omega, k_1, T_1) = k_1 \frac{4c}{\pi a} + \xi + (\xi^2 - \omega^2)(T_1 + T_2) + T_1 T_2 (\xi^3 - 3\xi\omega^2)$$

$$Y(\xi, \omega, k_1, T_1) = \omega + 2(T_1 + T_2)\xi\omega + T_1 T_2 (3\xi^2\omega - \omega^3).$$

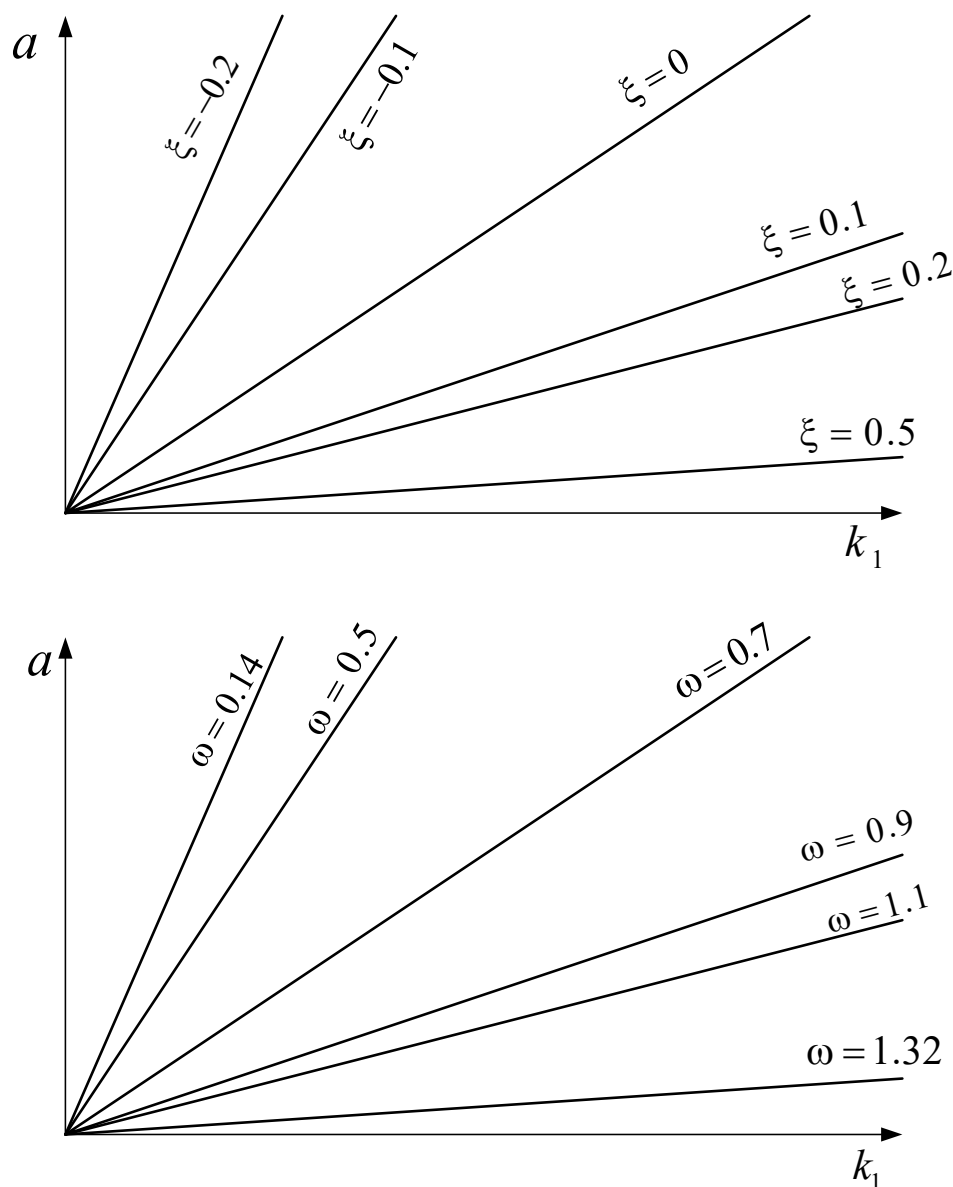
След приравняването им на нула от второто уравнение се определя:

$$\omega^2 = \frac{1 + 2(T_1 + T_2)\xi + T_1 T_2 3\xi^2}{T_1 T_2}$$

и от първото

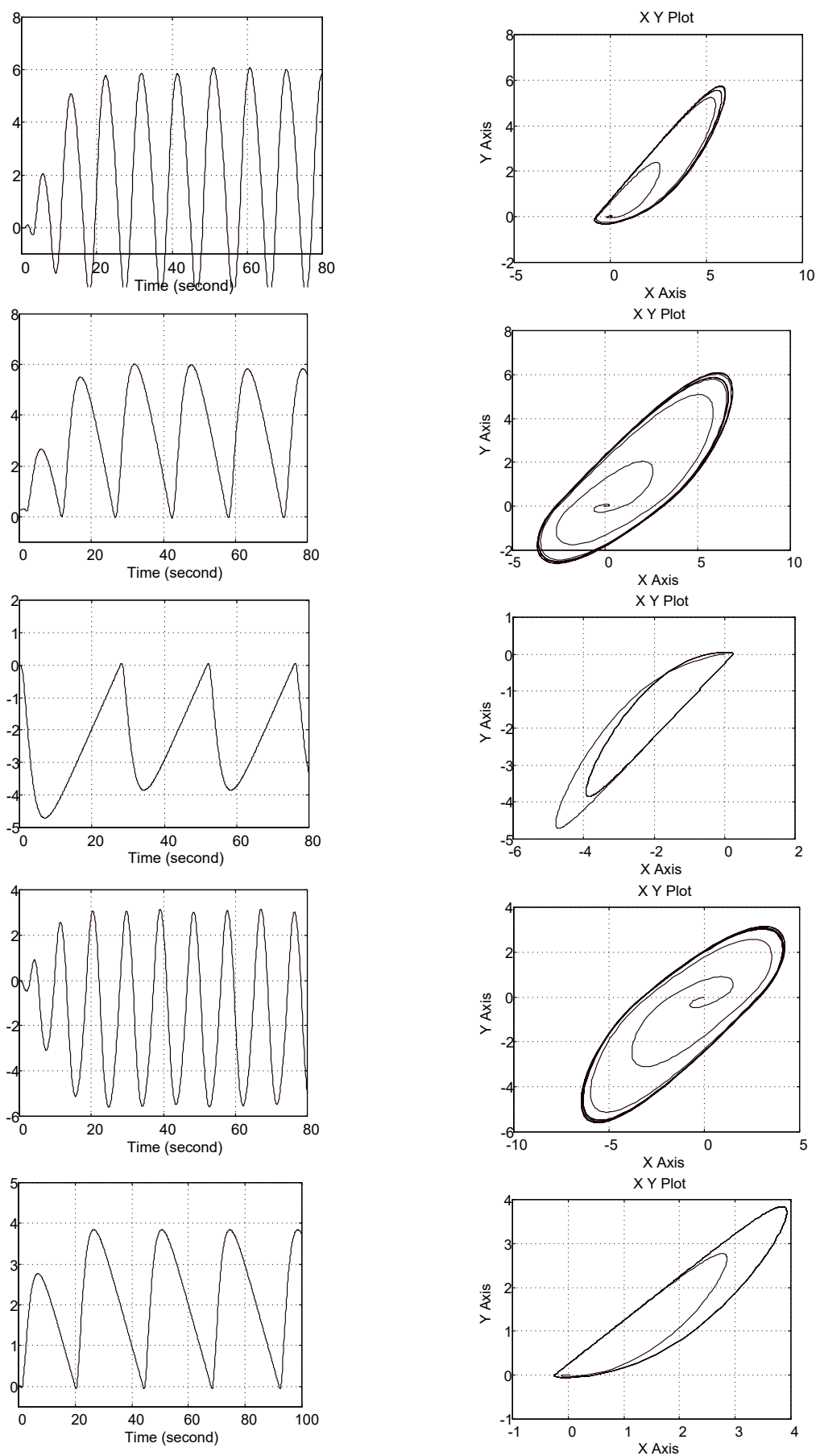
$$a = \frac{4ck_1}{\pi} \left(\frac{1}{(T_1 + T_2 + 3\xi T_1 T_2) \left(\frac{1 + 2(T_1 + T_2)\xi + T_1 T_2 3\xi^2}{T_1 T_2} \right) - (\xi + \xi^2(T_1 + T_2) + \xi^3 T_1 T_2)} \right)$$

С помощта на двете уравнения, като се задават различни стойности на ξ и ω в диапазона $-\infty \leq \xi \leq \infty$ и $0 \leq \omega \leq \infty$ и се построяват диаграмите на качеството на системата – фиг. 12.32.

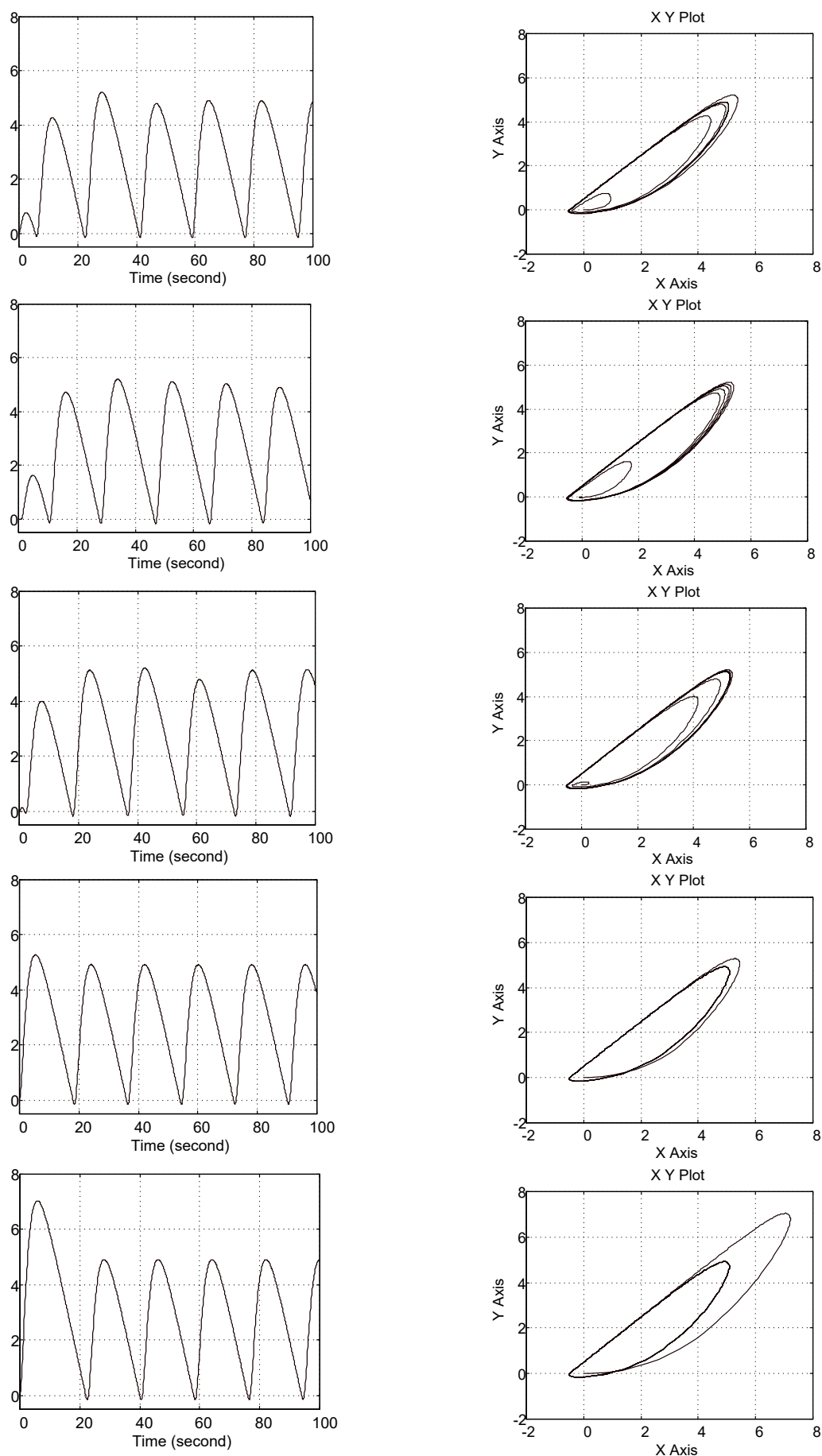


Фиг. 12.32. Диаграми на качеството на системата по Пример. 12.8.

Системата е моделирана с помощта на програмния продукт Simulink на Matlab и са симулирани преходните процеси и фазовите траектории при различни стойности на параметъра на настройка k_1 и начални условия, показани съответно на фиг. 12.33 и фиг. 12.34.



Фиг. 12.33. Фазови траектории и преходни процеси при промяна стойността на параметъра на настройка k_1 на системата



Фиг. 12. 34. Фазови траектории и преходни процеси при промяна стойността на началните условия и постоянна стойност на параметъра на настройка k_1 на системата

ГЛАВА 13

МЕТОДИ ЗА ПОДОБРЯВАНЕ НА ПРОЦЕСА НА РЕГУЛИРАНЕ И МЕТОДИ ЗА СИНТЕЗ НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ

13.1. Повишаване точността на системите за автоматично регулиране

Общи методи

Към общите методи за повишаване на точността на системите за автоматично регулиране се отнасят:

- Увеличаване на коефициента на усилване на отворената система
- Повишаване на степента на астатизма
- Използване на регулиране по производната от грешката

Повишаването на степента на астатизма се използва за отстраняване на установената грешка в различните типови режими. Формално това се свежда до това, че се нулират първите коефициенти на грешката на системата. Например $\gamma_0 = 0$ при астатизъм от първи ред, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ при астатизъм от втори ред, $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ при астатизъм от трети ред. Физически повишаване на реда на астатизма се осъществява като се въведе интегриращо звено. Структурната схема на системата с въвеждане на интегриращо звено е показана на фиг. 13.1.

Предавателната функция на интегриращото звено е

$$W_I(s) = \frac{k_I}{s}, \quad (13.1)$$

където, k_I - коефициент на предаване на интегриращото звено.

13.2. Кorigиращи звена и методи за синтеза им

За да се получат желано качество на процеса на управление или регулиране, т. е. изискваната точност на системата и качеството на преходния процес има два метода. Първият се състои в това да се променят параметрите на системата, тъй като при изменение на параметрите се променят съществено коефициентите на уравненията и честотните характеристики.

Ако чрез изменение на параметрите не може да се получи желания резултат, то се използва втория метод – изменя се структурата на системата, като се въвеждат допълнителни звена – коригиращи устройства.

Основната задача на коригиращите устройства се състои в това да се повиши точността на системата и качеството на преходните процеси. Едновременно с това може да се реши и по общата задача – да се направи системата устойчива, ако тя без въвеждането на коригиращото звено е неустойчива, а след това да се получи и желаното качество на преходния процес.

Използват се четири основни вида коригиращи устройства:

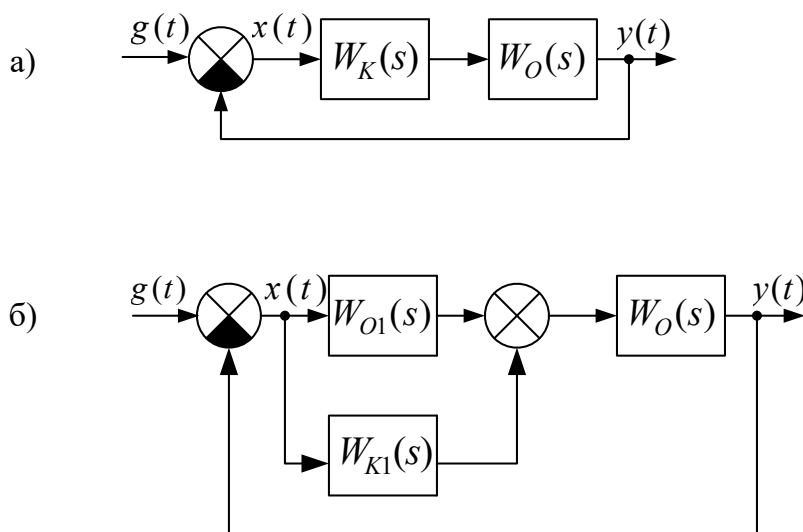
1. Последователни коригиращи устройства или както още се наричат *коригиращи филтри*, които могат да се описват с различни предавателни функции $W_K(s)$ - фиг. 13.1. Общата предавателна функция на отворената система ще е за фиг. 13.1, а:

$$W(s) = W_K(s) W_O(s) \quad (13.2)$$

и за фиг. 13.1, б:

$$W(s) = W_{O1}(s) + W_{K1}(s) \quad (13.3)$$

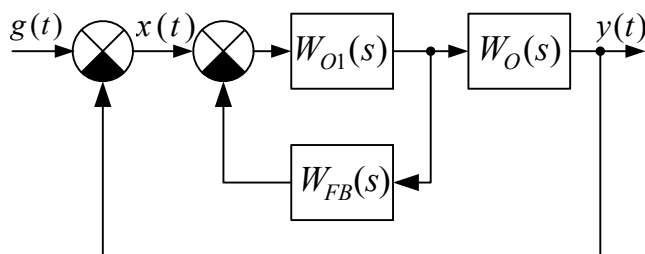
$W_O(s)$ - предавателна функция на зададената /некоригираната/ система



Фиг. 13.1 Последователни коригиращи устройства

2. Паралелни коригиращи устройства, които се осъществяват като допълнителни местни обратни връзки - $W_{FB}(s)$ - фиг. 13.2.

$$W(s) = \frac{W_{O1}(s) W_O(s)}{1 + W_{O1}(s) W_{FB}(s)} \quad (13.4)$$



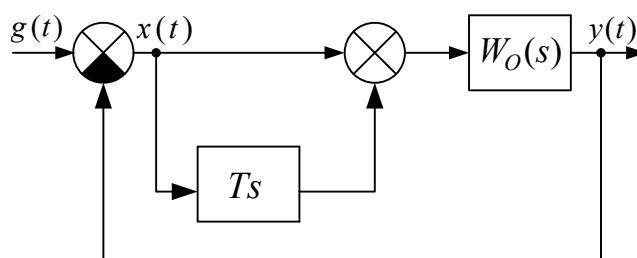
Фиг. 13.2 Паралелни коригиращи устройства

3. Коригиращи устройства по външно въздействие
4. Неединична главна обратна връзка

Предавателната функция на коригиращото устройство $W_K(s)$ или $W_{FB}(s)$ може да има произволен вид, но най-често се използват определен тип коригиращи устройства, които ще бъдат разгледани по-долу.

13.3. Последователни коригиращи устройства – филтри.

Въвеждане на производна от грешката – най-лесния начин за подобряване качеството на преходния процес. Структурно въвеждането на производната от грешката е представено на фиг. 13.3.



Фиг. 13.3 Въвеждане на производна от грешката

Технически това може да се осъществи с различни устройства, като производната се въвежда не в чист вид, а с инерционност $\frac{Ts}{T_1s + 1}$.

Предавателната функция на отворената система – фиг. 13.3 с идеална производна ще бъде

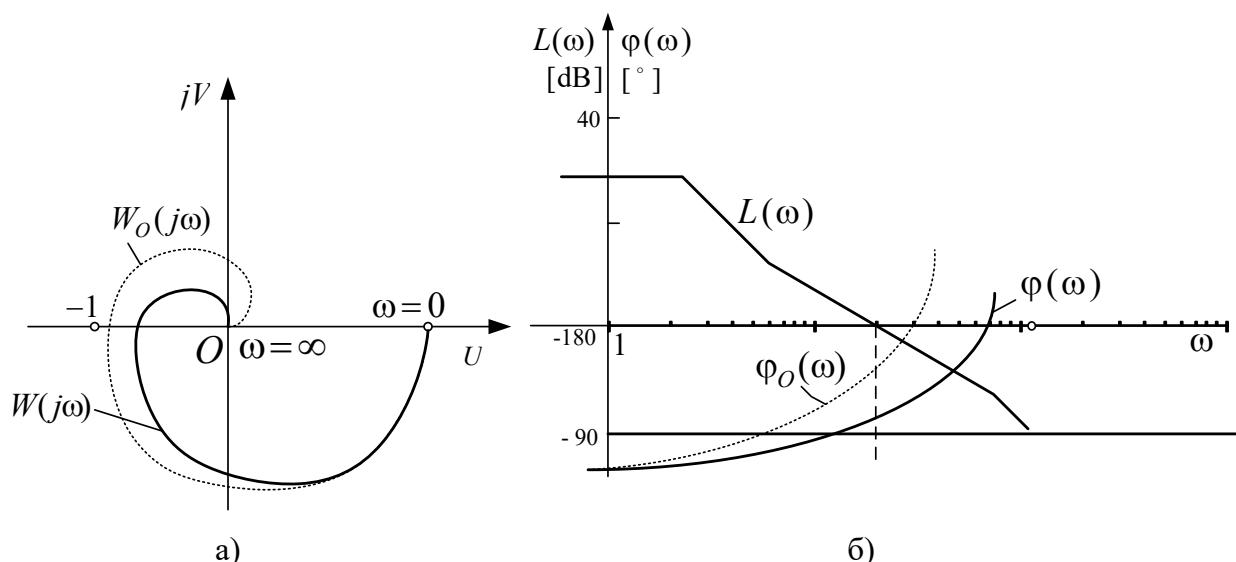
$$W(s) = (Ts + 1)W_O(s). \quad (13.5)$$

Като се замести $s = j\omega$, се получава амплитудата и фазата във вида:

$$A(\omega) = A_O(\omega) \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}; \quad (13.6)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_O(\omega) + \arctg(T\omega) \quad (13.7)$$

Съществено е, че при въвеждане на въздействие по производната се добавя положителна фаза. В резултат на това, радиус вектора на АФЧХ фиг. 13.4, *а* се завърта обратно на часовата стрелка, като увеличава запаса от устойчивост и подобрява качеството на преходния процес. Същото може да се наблюдава и на логаритмичните характеристики – фиг. 13.4, *б*.



Фиг. 13.4. Честотни характеристики при въвеждане на производна от грешката

При неидеално диференциране /с инерционност/ този ефект са намалява количествено, но качествено се запазва.

Въвеждането на производната от грешката служи и като стабилизиращо средство, т. е. може да се превърне неустойчива система в устойчива. Например, ако на фиг.4, а точката -1 е лежала вътре в характеристиката $W_O(s)$, то новата характеристика $W(s)$ вече може да не обхваща точката -1.

Увеличаване на общия коефициент на усилване K на отворената система е метод за повишаване на точността на системата.

Увеличаването на общия коефициент на усилване на отворената система е най-универсален и ефективен метод. Увеличаването на общия коефициент на усилване може да стане, като в системата се включи усилвател. В някои случаи коефициента на усилване може да се увеличи, като се повиши коефициента на предаване между отделните звена, например чувствителните елементи, редуктори и др.

Увеличаването на общия коефициент на усилване на отворената система води до намаляване на установената грешка в практически всички типови режими на работа. Стойността на установената грешка е обратно пропорционална на коефициента на усилване. При статична система, грешката от изменение на входното въздействие е

$$x_{g,cm} = \frac{g_0}{1+K}. \quad (13.8)$$

В система със статизъм от първи ред

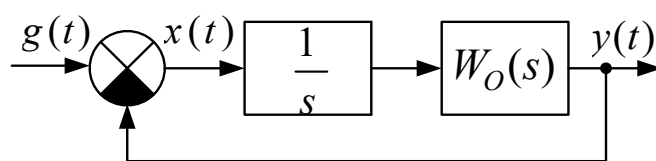
$$x_{g,ck} = \frac{\Omega_1}{K_1}. \quad (13.9)$$

В система с астатизъм от 2 ред

$$x_{g, \text{уск}} = \frac{\varepsilon_1}{K_2}. \quad (13.10)$$

При увеличаване на общия коефициент на усилване се ограничава устойчивостта на системата. При увеличаване на коефициента на усилване системата се приближава към колебателната граница на устойчивост. При определена стойност възникват незатихващи колебания.

Повишаването на общия коефициент на усилване до стойности, при които се осигурява изпълнението на изискванията за точност, обикновено се извършва при едновременно повишаване на запаса от устойчивост на системата.



Фиг. 13.5. Въвеждане на интеграл от грешката

Въвеждане на интеграл от грешката е метод за повишаване астатизма на системата, а от там и повишаване на точността ѝ – фиг. 13.5. Предавателната функция е от вида:

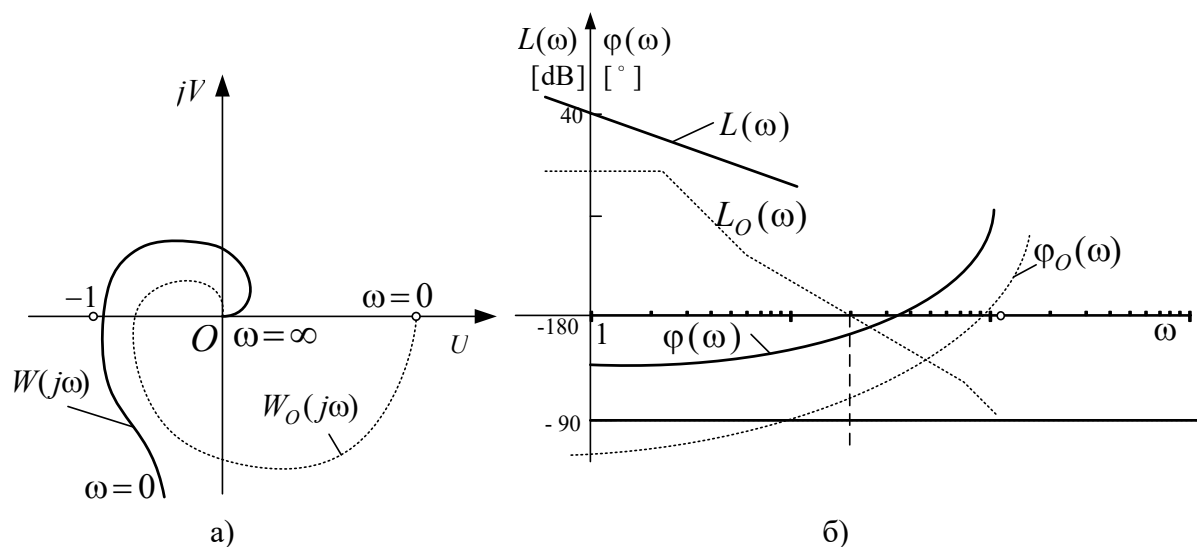
$$W(s) = \frac{1}{s} W_O(s) \quad (13.11)$$

Като се замести $s = j\omega$, се получава амплитудата и фазата във вида:

$$A(\omega) = \frac{A_O(\omega)}{\omega} \quad (13.12)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_O(\omega) - 90^\circ \quad (13.13)$$

В следствие на завъртането на фазовата характеристика на -90° влошава условието за условията за устойчивост и качество на преходния процес – фиг. 13.6, а и б. Понякога това може да доведе до неустойчивост на затворената система, ако на фиг. 13.6, а точката -1 се окаже вътре в характеристиката $W(s)$, въпреки, че $W_O(s)$ не обхваща тази точка.



Фиг. 13. 6. Честотни характеристики при въвеждане на интеграл от грешката

При въвеждане на двоен интеграл фиг.7 при предавателна функция

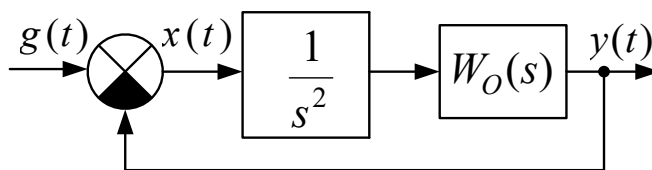
$$W(s) = \frac{K}{L(s)}, \quad (13.14)$$

/без производна в числителя/ се получава

$$W(s) = \frac{K}{s^2 L(s)}, \quad (13.15)$$

и характеристичното уравнение на затворената система

$$\lambda^2 L(\lambda) + K = 0. \quad (13.16)$$



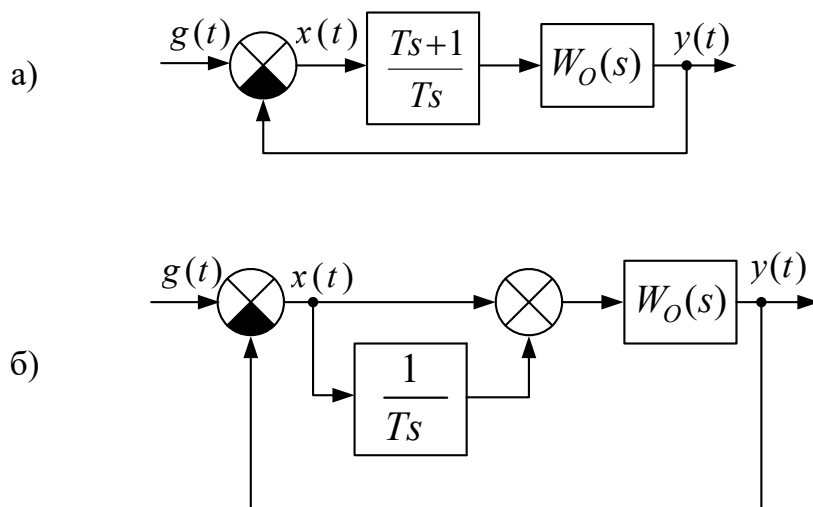
Фиг. 13.7. Въвеждане на двоен интеграл от грешката

Тази система е структурно неустойчива /неустойчива при всички стойности на параметрите/ тъй като в характеристичното уравнение отсъства член от първа степен. За това астатизъм от втори ред е реално възможен сам при въвеждане на производна в закона на управление, т. е при наличие на многочлен $N(s)$ в числителя на предавателната функция.

Изодромно коригиращо звено фиг. 13.8 с предавателна функция от вида:

$$W_K(s) = \frac{Ts + 1}{Ts}, \quad (13.17)$$

което обединява въвеждане на интеграл и производна.



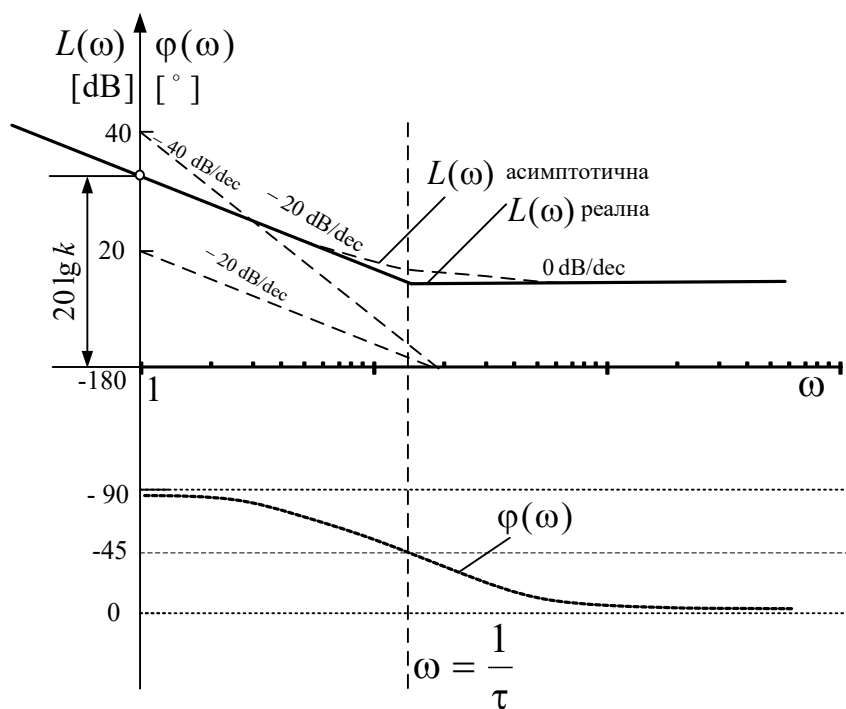
Фиг. 13.8. Въвеждане на изодромно коригиращо устройство

Може да се запише

$$W_K(s) = \frac{Ts + 1}{Ts} = 1 + \frac{1}{Ts}, \quad (13.18)$$

и структурно изодромното устройство може да се представи както е на фиг. 13.8, б. Следователно, в случая на простото въвеждане на интеграла регулирането в системата става не по големината на грешката, а само от интеграла от нея, то при изодромното устройство се получава регулиране по грешка и по интеграла от грешката.

Логаритмично честотните характеристики на изодромното устройство са показани на фиг. 13.9. Вижда се, че това устройство променя само нискочестотната част на амплитудо-честотната характеристика, влияеща на точността на системата /повишава се/, а отрицателното изместване на фазата, съществено за устойчивостта е малко.



Фиг. 13.9. ЛАЧХ на изодромно звено

13.4. Паралелни коригиращи звена

Разглеждат се паралелни коригиращи устройства във вид на обратни връзки. Основните видове коригиращи обратни връзки са следните:

- Твърда обратна връзка:

$$W_{FB}(s) = k_{FB}$$

- Инерционна твърда обратна връзка:

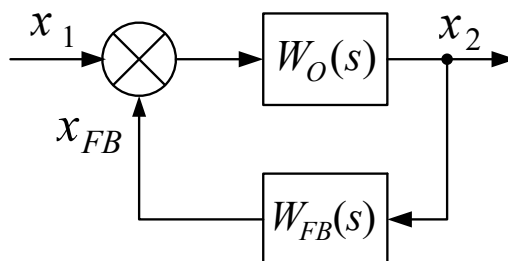
$$W_{FB}(s) = \frac{k_{FB}}{T_{FB}s + 1}$$

- Гъвкава обратна връзка:

$$W_{FB}(s) = k_{FB} s$$

- Инерционна гъвкава обратна връзка:

$$W_{FB}(s) = \frac{k_{FB} s}{T_{FB}s + 1}$$



Фиг. 13.10. Звено обхванато от положителна твърда обратна връзка

Положителна твърда обратна връзка. Приема се, че тя обхваща апериодично звено фиг. 13.10, т.е

$$W_O(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad W_{FB}(s) = k_{FB}$$

Тогава общата предавателна функция на системата ще бъде:

$$W(s) = \frac{W_O(s)}{1 - W_O(s)W_{FB}(s)} = \frac{k}{Ts + 1 - kk_{FB}}, \quad (13.19)$$

или

$$W(s) == \frac{k_1}{T_1s + 1}, \quad (13.20)$$

където

$$k_1 = \frac{k}{1 - kk_{FB}}; \quad T_1 = \frac{T}{1 - kk_{FB}}.$$

Следователно, положителната обратна връзка може да служи за увеличаване на коефициента на усилване. Но трябва да се има в предвид, че едновременно с това се увеличава и времеконстантата, тоест инерционността на звеното, а при $k_{FB} > \frac{1}{k}$ звеното става неустойчиво.

Отрицателна твърда обратна връзка. При обхващането с нея на апериодично звено се получава:

$$W(s) == \frac{k}{Ts + 1 + kk_{FB}} \quad (13.21)$$

където

$$k_1 = \frac{k}{1 + kk_{FB}}; \quad T_1 = \frac{T}{1 + kk_{FB}}.$$

Следователно, отрицателната твърда обратна връзка намалява инерционността на звената. Чрез нея се подобрява качеството на преходния процес в системата и може да окаже и стабилизиращо действие, т.е. да превърне неустойчива затворена система в устойчива /подобно на въвеждане на

производната/. Намалването на коефициента на усилване k_1 може да се компенсира за сметка на другите звена на системата.

При обхващане на интегриращо звено с отрицателна твърда обратна връзка, т.е. при

$$W_O(s) = \frac{k}{s}, \quad W_{FB}(s) = k_{FB}$$

се получава

$$W(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_O(s)W_{FB}(s)} = \frac{k}{s + kk_{FB}}, \quad (13.22)$$

или

$$W(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad (13.23)$$

където

$$k_1 = \frac{1}{k_{FB}}; \quad T_1 = \frac{1}{kk_{FB}}.$$

Вижда се, че под действието на твърдата обратна връзка се губят интегриращите свойства на звеното и то се превръща в апериодично с коефициент на усилване, който се определя само от обратната връзка. Времеконстантата T_1 ще е малка при голям коефициент на усилване на звеното k .

По-долу ще се разглеждат само отрицателни обратни връзки.

Твърда обратна връзка с инерционност. При обхващане с нея на интегриращо звено се получава:

$$W_O(s) = \frac{k}{s}, \quad W_{FB}(s) = \frac{k_{FB}}{T_{FB}s + 1} \quad (13.24)$$

$$W(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_O(s)W_{FB}(s)} = \frac{k(T_{FB}s + 1)}{T_{FB}s^2 + s + kk_{FB}} = \frac{k_1(T_{FB}s + 1)}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1} \quad (13.25)$$

където

$$k_1 = \frac{1}{k_{FB}}; \quad T_1^2 = \frac{T_{FB}}{kk_{FB}}; \quad T_2 = \frac{1}{kk_{FB}}$$

Следователно в този случай интегриращото звено се превръща в звено от втори ред с въвеждане на производната. При това коефициента на усилване k_1 времеконстантата на производната T_{FB} изцяло се определят от обратната връзка, а първичния коефициент на усилване на звеното k влияе на новите времеконстанти T_1 и T_2 , които ще са толкова по-малки, колкото е по-голям коефициента k . При голям коефициент k обхващането на интегриращо звено с

инерционна твърда обратна връзка е еквивалентна на усилвателно звено с въвеждане на производната $W(s) = \frac{(T_{FB}s + 1)}{k_{FB}}$.

От тук може да се види положителното влияние на инерционната обратна връзка на качеството на преходните процеси в системата.

Гъвкава обратна връзка. При обхващане с нея на колебателно звено

$$W_O(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}, W_{FB}(s) = k_{FB} s \quad (13.26)$$

$$W(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_O(s)W_{FB}(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 + kk_{FB}s} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi_1 Ts + 1} \quad (13.27)$$

където

$$2\xi_1 Ts = 2\xi Ts + kk_{FB}s; \quad \xi_1 = \xi + \frac{kk_{FB}}{2T}$$

В случая се увеличава коефициента на демпфериране на колебателното звено $\xi_1 > \xi$ като не се променя коефициента на усилване. Процеса става по-малко колебателен и може да се превърне и в апериодичен при $\xi_1 \geq 1$.

При обхващане на апериодично звено с гъвкава обратна връзка ще се увеличи само неговата инерционност /увеличава се времеконстантата му/.

При обхващане на инерционно интегриращо звено с гъвкава обратна връзка, т. е.

$$W_O(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}, W_{FB}(s) = k_{FB} s \quad (13.28)$$

$$W(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_O(s)W_{FB}(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1) + kk_{FB}s} = \frac{k_1}{s(T_1s + 1)} \quad (13.29)$$

където

$$k_1 = \frac{k}{1 + kk_{FB}}; \quad T_1 = \frac{T}{1 + kk_{FB}}$$

Вижда се, че в този случай се съхранява същия тип интегриращо звено, но с по-малка инерционност – намаля времеконстантата.

Инерционна гъвкава обратна връзка. Прилагаме я за отново за инерционно интегриращо звено

$$W_O(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}, W_{FB}(s) = \frac{k_{FB}s}{T_{FB}s+1}, \quad (13.30)$$

$$W(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_O(s)W_{FB}(s)} = \frac{k(T_{FB}s+1)}{s[TT_{FB}s^2 + (T+T_{FB})s + 1 + kk_{FB}]} = \frac{k(T_{FB}s+1)}{s(T_2^2s^2 + T_1s + 1)}, \quad (13.31)$$

където

$$k_1 = \frac{k}{1+kk_{FB}}; T_1 = \frac{T+T_{FB}}{1+kk_{FB}}; T_2^2 = \frac{TT_{FB}}{1+kk_{FB}}.$$

В този случай се съхранява интегриращото свойство на звеното и се получава ефект на въвеждане на производната, т.е. интегриращото звено става изодромно, а новите времекостанти T_1 и T_2 характеризиращи инерционността на звеното могат да се получат малки при увеличаване на коефициента на усилване k . В последния случай се получава

$$k_1 \approx \frac{1}{k_{FB}} \text{ и } W(s) = \frac{T_{FB}s+1}{k_{FB}s}.$$

Може да се отбележи, че инерционното закъснение в обратната връзка /за разлика от правата верига/ е целесъобразно да се използва за подобряване на качеството на преходния процес, като се получава ефект, аналогичен на въвеждане на производна в правата верига.

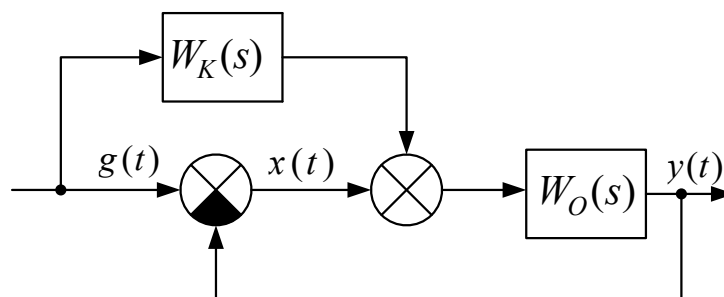
Общо свойство е, че твърдите обратни връзки анулират интегриращите свойства на звеното / т. е анулират астатизма в системата, ако в нея няма интегриране на друго място във веригата на звената/, а гъвкавите обратни връзки съхраняват астатизма.

13.5. Коригиращи устройства по външно въздействие. Инвариантност

Основния принцип на ТАУ се състои в формирането на управляващия сигнал според големината на грешката $x(t)$ /с използване на интеграл и производна от $x(t)$ /. Ако се въведе коригиращо устройство по външно въздействие, то се получава *комбинирано регулиране* – по грешка и външно въздействие /също с използването на съответните интеграл и производни/.

Чрез въвеждане на корекция по външно въздействие теоретично се отдава възможност при определени условия да се сведе установената грешка до нула при произволна форма на външното въздействие. Това свойство се нарича *инвариантност на системата* по отношение на външното въздействие.

Външните въздействие се делят на задаващи, сигнала на които системата трябва да възпроизвежда и смущаващи, действието на които трябва да се неутрализира.



Фиг. 13.11. Кorigиращо звено по задаващо въздействие

Кorigиращи устройства по външно въздействие. Заедно със сигнала от грешката се въвежда във вътрешната верига и сигнала от задаващото въздействие $g(t)$ през звено с предавателна функция $W_K(s)$ - фиг. 13.11. Изходната величина в лапласово изображение е:

$$X(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_O(s)} [1 + W_K(s)] G(s), \quad (13.32)$$

т. е. еквивалентната предавателна функция на затворената система за регулируемата величина ще е

$$\Phi_e(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_O(s)} [1 + W_K(s)], \quad (13.33)$$

а за грешката

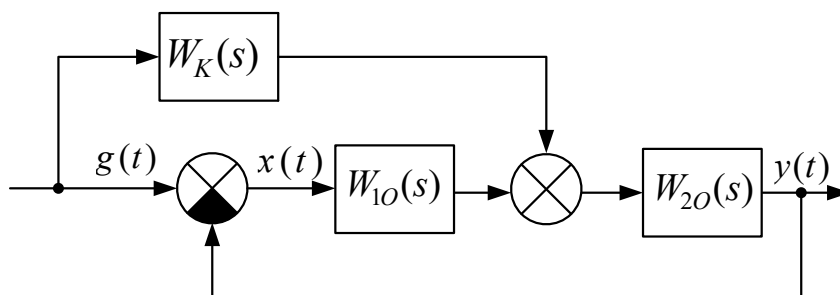
$$\Phi_{xe}(s) = 1 - \Phi_e(s) = \frac{1 - W_K(s)W_O(s)}{1 + W_O(s)}, \quad (13.34)$$

Установената грешка ще е равна на нула при произволно задаващо въздействие ако

$$W_K(s) = \frac{1}{W_O(s)} \quad (13.35)$$

Това условие технически е невъзможно да се изпълни точно, но може да се подбере приблизително равенство за определени областите на честотите /практически пропускани от системата/. С такава непълна инвариантност на системата може съществено да се намали грешката $x(t)$ на системата за регулиране.

В някои случаи сигналът по задаващо въздействие може да се въведе не непосредствено на входа на системата, а в точка във вътрешността на канала на регулиране – фиг. 13.12.



Фиг. 13.12. Коригиращо звено по задаващо въздействие в канала на регулирането

В този случай еквивалентната предавателна функция на затворената система за регулируемата величина ще е

$$\Phi_e(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_O(s)} \left[1 + \frac{W_K(s)}{W_{1O}(s)} \right], \quad (13.36)$$

а за грешката

$$\Phi_{xe}(s) = 1 - \Phi_e(s) = \frac{1 - W_K(s)W_{2O}(s)}{1 + W_O(s)}, \quad (13.37)$$

Еквивалентната предавателна функция на отворената система

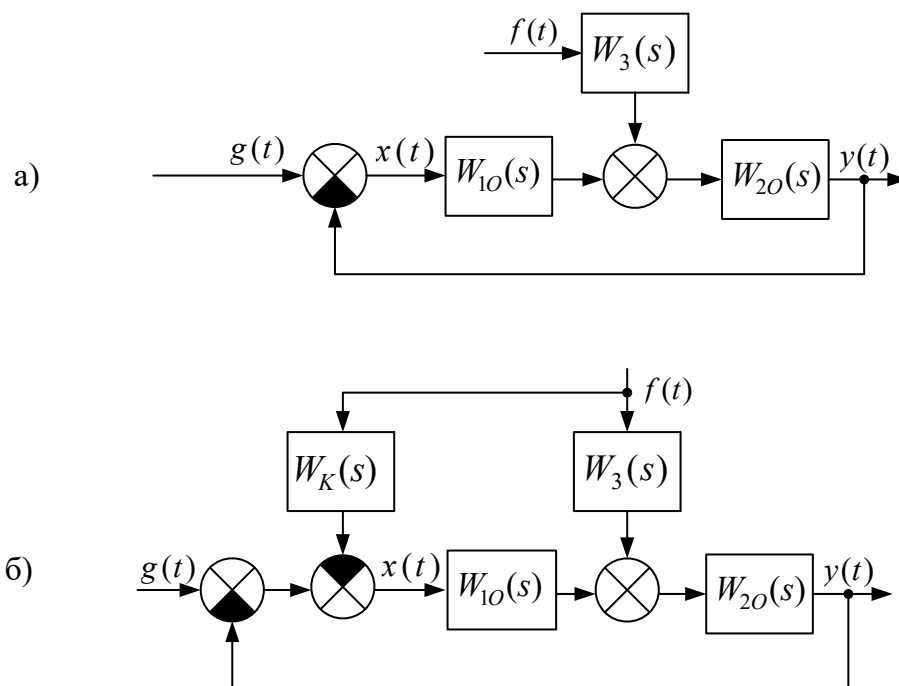
$$W_e(s) = \frac{W_O(s)}{1 - W_K(s)W_{2O}(s)} \left[1 + \frac{W_K(s)}{W_{1O}(s)} \right], \quad (13.38)$$

Условието за инвариантност е

$$W_K(s) = \frac{1}{W_{2O}(s)} \quad (13.39)$$

Коригиращо устройство по смущение.

Зададена е схемата на фиг. 13. 13, а. Въвежда се коригиращо устройство $W_K(s)$, на входа на което се подава смущаващото въздействие $f(t)$ - фиг. 13.13, б.



Фиг. 13.13. Коригиращо звено по смущаващо въздействие

Предавателната функция на затворената система за регулируемата величина $y(t)$ по смущаващо въздействие е

$$\Phi_f(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{W_{2o}(s)[W_3(s) - W_K(s)W_{1o}(s)]}{1 + W_{1o}(s)W_{2o}(s)}. \quad (13.40)$$

За да се унищожи влиянието на смущаващото въздействие $f(t)$ условието за пълна инвариантност е

$$W_K(s) = \frac{W_3(s)}{W_{1o}(s)}. \quad (13.41)$$

Точната техническа реализация е почти невъзможна и да това също може да се използва непълна инвариантност.

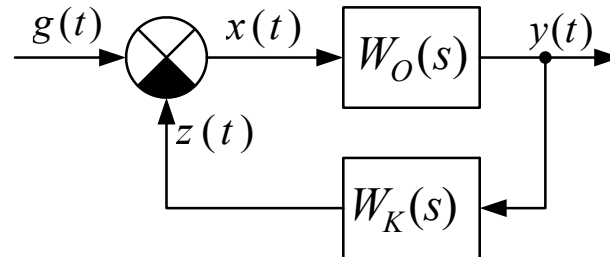
Особена трудност е, че смущаващото въздействие $f(t)$ не винаги може да се подаде на входа на $W_K(s)$. За това е нужно да може да се измери смущението $f(t)$, което не е винаги възможно, но може да се използват косвени методи за измерване, които се използват широко в практиката.

Въвеждането на коригиращи устройства по външно въздействие е важен метод за повишаване на точността на системите за автоматично регулиране. Знаменателя на предавателните функции не се променя при въвеждането на корекциите. За това, като се отчете малкостта на числителя, може да се каже, че характеристичното уравнение на затворената система при въвеждане на такава корекция практически остава непроменено. Следователно този метод съществено повишава точността, почти не влияе на качеството на преходния

процес, за разлика от другите методи за подобряване на точността, които винаги са свързани с влошаване качеството на преходния процес ако не се вземат допълнителни мерки.

Използване на неединична главна обратна връзка

Въвежда се в главната обратна връзка, която обичайно е равна на единица, устройство с предавателна функция $W_K(s)$ - фиг. 13.14.



Фиг. 13.14. Не единична главна обратна връзка

В този случай на входа на системата задаващото въздействие $g(t)$ се сравнява не непосредствено с изходната величина $y(t)$, а с величината $z(t)$

$$Z(s) = W_K(s)X(s) \quad (13.42)$$

и се получава

$$X(s) = \frac{W_O(s)}{1 + W_K(s)W_O(s)} G(s) \quad (13.43)$$

За пълна инвариантност се изисква

$$X(s) = G(s) \text{ т. е.} \quad (13.44)$$

$$W_K(s) = 1 - \frac{1}{W_O(s)} \quad (13.45)$$

Вижда се, че предавателната функция на главната обратна връзка трябва да се различава от единица, за да бъде системата инвариантна, т. е. да възпроизвежда без установена грешка произволно входно въздействие. Това условие може да се изпълнява приближено. При този начин се променя съществено характеристичното уравнение и за това трябва да се следи за желаното качество на преходния процес.

В равновесното състояние $s = 0$ в система без астатизъм се получава

$$k_K = 1 - \frac{1}{k_O} \quad (13.46)$$

Следователно, ако се въведе в главната обратна връзка на системата коефициент на усилване k_K то системата се превръща в астатична без въвеждане на интегриращо звено.

ГЛАВА 14

СИНТЕЗ НА АВТОМАТИЧНИ СИСТЕМИ

Задачата на синтеза е да се определят и реализират такива статични и динамични характеристики, които при зададените ограничения най-добре удовлетворяват зададените изисквания. С други думи под синтез се разбира процес на проектиране на САУ, включващ определяне на оптималната структура на системата и нейните характеристики, осигуряващи достигането на исканите показатели на качеството.

Към синтеза могат да се отнесат следните основни въпроса:

- Синтез на оптимални динамични характеристики на системата
- Синтез на параметри на системата при зададена структура
- Синтез на коригиращи устройства по зададени показатели на качеството

Синтеза на оптимални динамични характеристики на системата в повечето случаи се свежда до решение на вариационни задачи, осигуряващи най-добро управление или минимум на грешката на управлението в съответствие с приети критерии за оптимизация.

При инженерния синтез на САУ трябва да се обезпечи исканата точност и приемлив характер на преходните процеси.

Исканата точност се постига с избор на общия коефициент на усилване на системата и при необходимост на се използват коригиращи звена, повишаващи точността на системата. Тази задача може да се реши, като се определят грешките в типовите режими, като това доста често става с използване на метода на моделиране и симулиране на процесите с използване на компютърна техника.

Решаването на втората задача – обезпечаване на приемливи преходни процеси се оказва по-трудна, следствие на големия брой варируеми параметри. В настоящето време за целта на синтеза се използва компютърна техника със специализирани софтуерни продукти Matlab Simulink, Labview и др.

14.1. Синтез на коригиращи устройства с използване на логаритмични честотни характеристики

При синтеза на коригиращи устройства се изхожда от това, че обекта за регулиране /неизменяема част на системата/ е зададен, а на синтез подлежат коригиращите устройства или регулатора /изменяема част на системата/.

Когато САУ не притежава необходимите качества изисквани от проектанта е необходимо да се направи корекция, така че да се достигнат те или чрез пренастройка параметрите на автоматичния регулатор, или чрез включване към нея на някакви допълнителни звена, наречени коригиращи. Най-често коригиращите звена се синтезират, като се използват логаритмичните честотни характеристики на системата. Реда за определянето вида на звеното е

следния /обикновено най-лесно се синтезират последователно коригиращи звена/:

1. Построява се логаритмичната амплитудно-честотна характеристика на изходната /некоригирана/ система.

2. Построява се логаритмичната амплитудно-честотна характеристика на системата с изискваните качества /коригираната или желана система/ .

3. Изваждат се двете характеристики една от друга-получава се характеристиката на последователно коригиращо звено

4. Определят се параметрите и вида на коригиращото звено

5. Извършва се техническата реализация а звеното

6. Прави се проверочно изследване на системата и се построява преходния процес в коригираната система

За минимално-фазовите и някои неминимално-фазови звена е необходимо да се построи само логаритмичната амплитудно-честотна характеристика.

При построяване на желаната логаритмична характеристика, за по-лесната реализация на коригиращото звено е необходимо да се спазват следните по-важни препоръки.

1. Нискочестотната част на характеристиката определя най-вече точността на работа на системата. Средночестотната област, преминаваща през честотата на срязване ω_{cr} определя запаса от устойчивост и качеството на работа на системата. Високочестотната област влияе незначително на качеството на работата на системата.

2. Препоръчително е желаната логаритмична характеристика ЛАЧХ да съвпада с изходната в по-голяма част от диапазона на изменението на честотите. В противен случай реализацията на коригиращото звено се затруднява значително.

3. В нискочестотната област за постигане на исканата точност е необходимо наклона на желаната ЛАЧХ да е $-20\nu \frac{dB}{dec}$. При $\omega = 1s^{-1}$ логаритмичната характеристика пресича ординатната ос при стойност $20\nu \lg K_v$, ν - коефициент на астатизъм на системата, K_v - общия коефициент на усилване на отворената система/.

При хармонично входно въздействие - $g(t) = g_{max} \sin \omega_g t$, ако е известна допустимата грешка x_{max} желаната ЛАЧХ трябва да преминава по-високо от контролната точка A_k , която при честота ω_g , минава през

$$L_{\omega_g} = 20 \lg \frac{g_{max}}{x_{max}}. \quad (14.1)$$

Ако е зададена допустимата грешка x_{max} и максималната скорост Ω_{lmax} и максималното ускорение ε_{lmax} на входното въздействие, то може да се подбере еквивалентно хармонична входно въздействие, при което амплитудата на скоростта и ускорението са равни на максималните зададени стойности

$$\dot{g}(t) = g_{\max} \omega_g \cos \omega_g t = \Omega_{l\max} \cos \omega_g t \quad (14.2)$$

$$\ddot{g}(t) = -g_{\max} \omega_g^2 \cos \omega_g t = -\varepsilon_{l\max} \cos \omega_g t \quad (14.3)$$

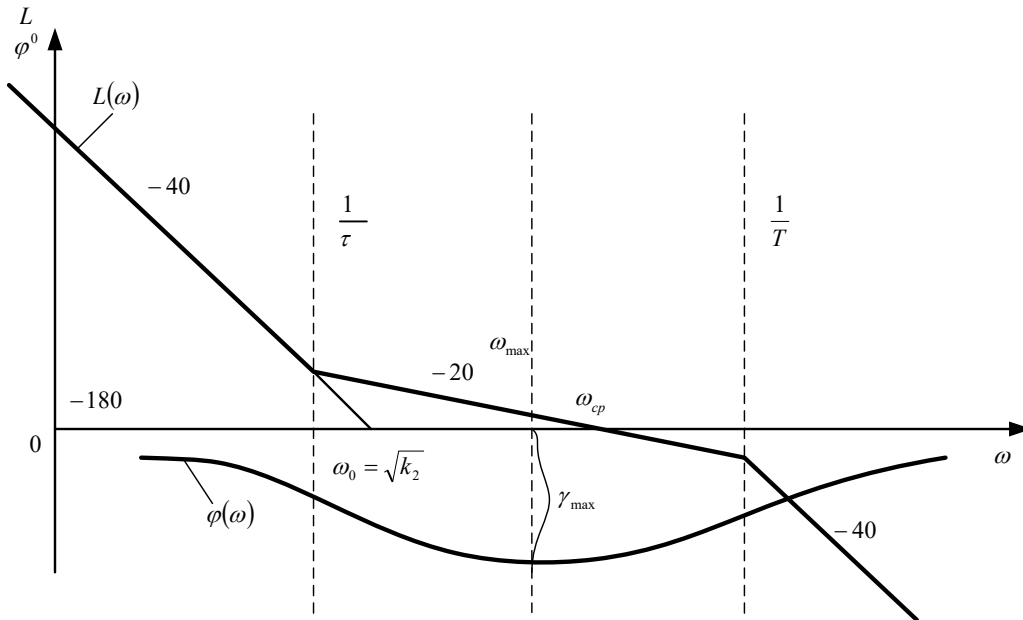
Откъдето:

$$\omega_g = \frac{\varepsilon_{l\max}}{\Omega_{l\max}}; \quad g_{\max} = \frac{\Omega_{l\max}^2}{\varepsilon_{l\max}} \quad (14.4)$$

Координатата на контролната точка е:

$$L_{\omega_g} = 20 \lg \left(\frac{\Omega_{l\max}^2}{\varepsilon_{l\max} x_{\max}} \right) \quad (14.5)$$

При задаване на $\Omega_{l\max}$, $\varepsilon_{l\max}$ може да се получи така наречената забранена зона за нискочестотната ЛАЧХ.



Фиг. 14.1. Определяне показателя на колебателност M

4. В областта на срязващата честотата ω_{cp} наклона на желаната ЛАЧХ трябва да бъде -20 dB/dec за да се осигури необходимия запас от устойчивост. Колкото по-дълъг е този участък, толкова по-голям е запасът от устойчивост, респективно качеството на преходните процеси. Съществува определена връзка между дължината на този участък и показателя на колебателност M - фиг. 14.1. предполага се, че в областта на средните честоти предавателната функция на системата има вида:

$$W(s) = \frac{K_2(1 + \tau s)}{s^2(1 + Ts)} \quad (14.6)$$

където $K_2 = \omega_0^2$.

Фазо-честотната характеристика се записва

$$\varphi(\omega) = -180^0 + \arctg \omega \tau - \arctg \omega T. \quad (14.7)$$

Запасът по фаза е

$$\gamma(\omega) = \varphi(\omega) + 180^0 \quad (14.8)$$

$$\gamma(\omega) = \arctg \omega \tau - \arctg \omega T = \arctg \frac{(h-1)\omega T}{1 + h\omega^2 T^2}, \quad (14.9)$$

където $h = \frac{\tau}{T}$ - дължината на участъка на ЛАЧХ с наклон -20 dB/dec . При зададен показател на колебателност M максималния запас по фаза е:

$$\gamma_{\max} = \arcsin \frac{1}{M} = \arctg \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (14.10)$$

който се получава при честота $\omega_{\max}^0 = \frac{1}{T\sqrt{h}}$. След заместване в (14.10) се получава

$$\gamma_{\max} = \arctg \frac{h-1}{2\sqrt{h}} \quad (14.11)$$

и се определя дължината на участъка

$$h = \frac{M+1}{M-1}. \quad (14.12)$$

Тъй като при честота $\omega_{\max}^0$

$$A(\omega_{\max}^0) = \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (14.13)$$

$$\omega_{cp} = \frac{M\omega_{\max}^0}{\sqrt{M^2 - 1}}, \text{ то}$$

$$\omega_0^2 \tau^2 = \frac{\omega_{cp} \sqrt{h}}{\omega_{\max}^0} \text{ и}$$

$$\tau \geq \omega_0^{-1} \sqrt{M(M-1)} \quad T \leq \omega_0^{-1} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (14.14)$$

Когато предавателната функция е от вида

$$W(s) = \frac{K_2(1 + \tau s)}{s^2(1 + Ts)(1 + T_1s) \dots}, \quad (14.15)$$

където, $T_1, T_2, \dots, T_n$ - малки времекостанти, то дължината на участъка се определя от:

$$\tau \geq \omega_0^{-1} \sqrt{M(M-1)} \quad T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq \omega_0^{-1} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}. \quad (14.16)$$

Бързодействието на системата може да се оцени по изрази:

$$t_n \approx (1-2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}} \quad (14.17)$$

Пример 14.1:

Зададена е предавателната функция на изходната, отворена система

$$W(s) = \frac{K_1}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)},$$

където, K_1 - коефициент на усилване, T_1, T_2 - времекостанти. Поставя се задачата да се синтезира система с желана точност $x_{\max}$ и качество, определени от максималните стойности на скоростта $\Omega_{g \max}$ и ускорението $\varepsilon_{g \max}$ на синусоидално изменящо се въздействие от вида

$$g(t) = g_{\max} \sin(\omega_g t + \varphi_g)$$

и показател на колебателност M .

За постигане на исканата точност е необходимо логаритмичната характеристика на желаната система в нискочестотната област да преминава на 3 децибела над контролната точка с координати

$$T = \frac{1}{\omega_g} = \frac{\Omega_{g \max}}{\varepsilon_{g \max}}, L(\omega_g) = 20 \lg \left(\frac{\Omega_{g \max}^2}{\varepsilon_{g \max} x_{\max}} \right).$$

Наклонът на желаната характеристика в средночестотната област трябва да бъде 20 dB/дек , а дължината на участъка се определя от показателя на колебателност M чрез изразите:

$$\tau_1 \geq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}, T_2 + T_3 \leq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}},$$

$$\tau_2 = T_1, \omega_0 = \sqrt{1.41 \frac{\varepsilon_{g \max}}{x_{\max}}}.$$

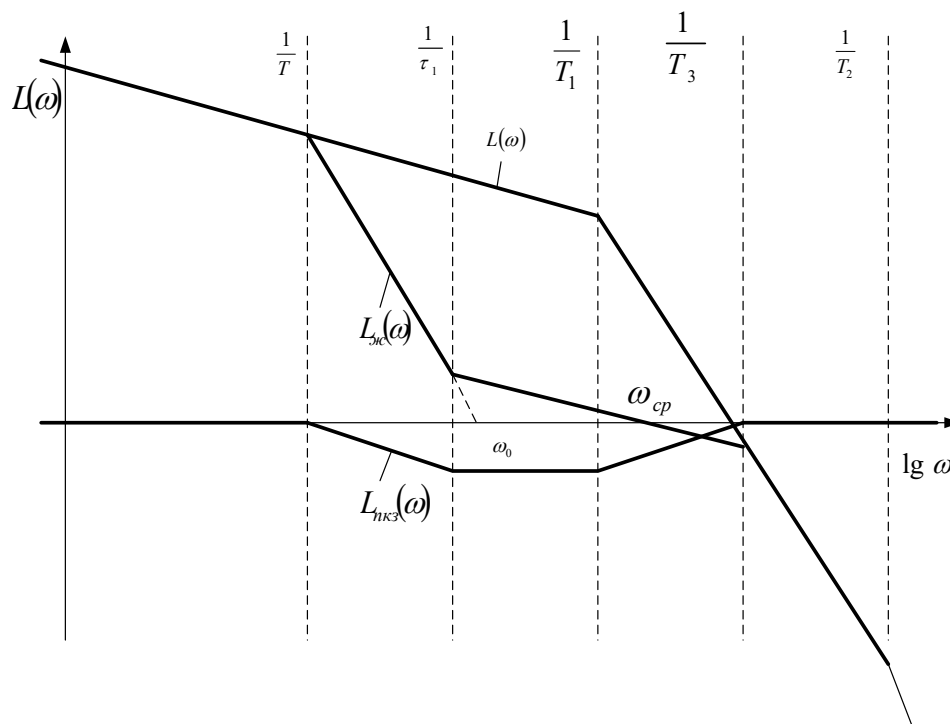
Изходната и желана характеристики за случая са показани на фиг. 14.2. Логаритмичната честотна характеристика на последователното коригиращо

звено съответства на интегро-диференциращо звено и е показана на същата фигура. Предавателната му функция се запазва във вида:

$$W_{нк}(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + T s)(1 + T_3 s)}.$$

Предавателната функция на желаната система се записва:

$$W(s) = \frac{K_1(1 + \tau_1 s)}{s(1 + T s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}.$$



Фиг. 14.2. Изходната и желана характеристики към Пример 14.1.

14.2. Оптимален синтез

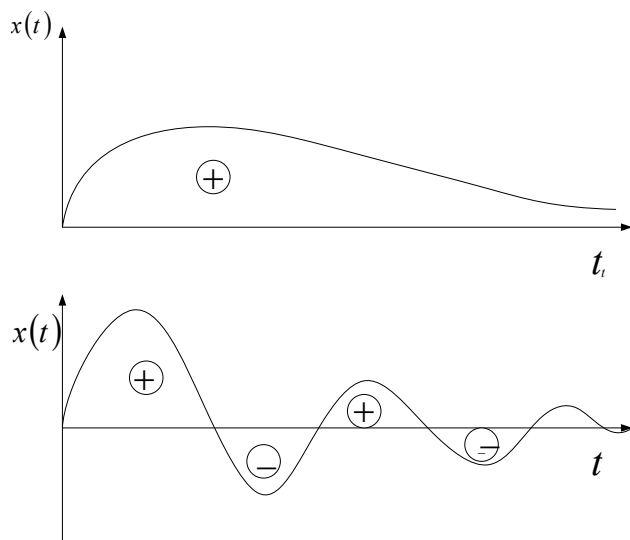
При синтеза на коригиращи звена се реализират автоматични системи с предварително зададени качества. При синтеза на оптимални системи се постига реализация на системи, които са най-добри от определена гледна точка. Например:

1. Системи с най-голямо бързодействие /системи с най-малко време за преход от едно състояние в друго/.
2. Системи с най-малко тегло.
3. Системи с най-малък разход на енергия.
4. Системи с най-малки загуби на енергия
5. Системи с най-голяма точност на изпълнение на възложената ѝ задача, и т.н.

При работата на системата е важно да се формулира правилно гледната точка за извършване на оптимизацията. Обикновено тя се формулира по математичен път чрез така наречения критерий за оптималност. Това в повечето случаи е

някакъв интеграл, функция на фазовите координати и управляващите въздействия. От множеството възможни системи оптимална е тази, която минимизира избрания критерий за оптималност. Най-простият възможен критерий е:

$$I = \int_0^{\infty} x(t) dt \quad (14.18)$$



Фиг. 14.2. Интегрален критерий за оптималност.

Този критерий не е подходящ за оценка на колебателни системи, тъй като може да се окаже, че един преходен процес с голям брой колебания, големи пререгулиране и време за затихване е по-добър от един апериодичен с много по-добри показатели за качеството. По-добри оценки могат да се получат ако критериите се запишат във вида:

$$I_1 = \int_0^{\infty} |x(t)| dt \quad (14.19)$$

или под формата на много често използвания квадратичен критерий.

$$I_2 = \int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (14.20)$$

Когато искаме оптималния процес да е близък до апериодичен с определена времеконстанта критерият се записва във вида:

$$I_3 = \int_0^{\infty} [x(t) + T x'(t)] dt \quad (14.21)$$

Или още по-добър е:

$$I_4 = \int_0^{\infty} [x(t) + T_1 x'(t) + T_1 x'(t) + T_2^2 x''(t) + \dots + T_n^n x^{(n)}(t)] dt \quad (14.22)$$

Понякога критерият за оптималност се задава под формата на квадратичен функционал от няколко функции:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 y_i^2(t) dt \text{ или} \quad (14.23)$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} y_i y_j(t) dt, \quad (14.24)$$

където c_{ij} - тегловни коефициенти, y_i -променливи функции на времето t . Функционалът може да се зададе и в някаква друга форма, например

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dt. \quad (14.25)$$

Най-често като подинтегрална функция се използват положително определени квадратични форми от фазовите координати и управляващите въздействия, например:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} u_i u_j + \sum_{k,l=1}^{\infty} b_{k,l} x_k x_l \right] dt \quad i=1 \dots n \quad j=1 \dots m. \quad (14.26)$$

Въвеждането на понятието критерий за оптималност дава възможност да се дефинира задачата за оптималното управление: Ако $\vec{x} = \|x_i\|_{n \times 1}$ матрица стълб на фазовите координати $\vec{u} = \|u_i\|_{k \times 1}$ матрица стълбец на управляващите въздействия, принадлежащи на някое множество, смятано за допустимо $u(t) \in U$. От многото възможни допустими управления, които превеждат обекта от началното $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$ до крайно $\vec{x}(t_1) = \vec{x}^1$ състояния оптимално е това /и съответстващата му траектория/, което минимизира избрания критерий за оптималност.

При всяка оптимизационна задача съществуват редица условия, които ограничават областта на възможните решения - по отношение на мощността, теглото, действащите сили, стойността, допустимата грешка, реалните физически елементи на системата и др. Тези ограничения трябва да се отчитат при синтеза на реалната физическа система.

Основните ограничения налагани върху работата на системите обикновено са от вида:

1. Ограничения по максималните стойности на фазовите координати и управляващите въздействия:

$$\begin{aligned} |x_i| &\leq x_{i \max} \\ |y_j| &\leq y_{j \max} \end{aligned} \quad (14.27)$$

Отсъствието на този вид ограничения дава възможност за оптимизация на системата в отворена област, а при наличието им – в затворена, при което решението на задачата се усложнява значително.

2. Ограничения от вида на холономни връзки.

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \quad k = 1 \dots m \quad (14.28)$$

3. Ограничения от вида на нехолономни връзки под формата на диференциални уравнения.

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t) = 0 \quad (14.29)$$

4. Изопараметрични ограничения под формата на функционали

$$I_k = \int_{t_1}^{t_2} P_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dt \leq a_k \quad k = 1 \dots m, \quad (14.30)$$

където a_k - числа определящи пределните стойности на някакви величини, например: пределна температура, налягане, разход на гориво, енергия и др.

По своята същност оптимизационната задача е вариационна задача, при която е необходимо да се подбере програма и закон на регулиране по такъв начин, че да се получи минимум на функционала служещ като критерий за оптималност.

14.3. Използване на класически вариационни методи

Разглежда се интегрален критерий за оптималност от вида:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, u_1, u_2, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_m) dt. \quad (14.31)$$

Зададени са граничните условия $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0, \bar{x}(t_1) = \bar{x}^1$. Приема се, че във функционала няма производни по-високи от първа. Освен това не са наложени ограничения по фазовите координати и управляващите въздействия, т.е. оптимизацията е в отворена област.

В този случай решението на задачата се дава от уравненията на Ойлер записани за всички координати управляващи въздействия влизаци в уравнение (14.31)

$$F_{u_j} - \frac{d}{dt} F'_{\dot{u}_j} = 0 \quad j = 1 \dots m \quad (14.31)$$

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F'_{\dot{x}_i} = 0 \quad i = 1 \dots n, \quad (14.32)$$

където F' - частни производни от подинтегралната функция по съответните променливи. Решението определя сноп интегрални криви, наречени екстремали. Избира се тази от тях, която удовлетворява началните и крайни условия: $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0, \bar{x}(t_1) = \bar{x}^1$. При това е необходимо функциите x_i, u_j да притежават $2m$ непрекъснати производни /в случая $m=1$ - следователно две производни/. Освен това за да се установи, дали решението съответства на достигане на минимума, а не на максимума на функционала е необходимо да се изпълняват условията:

$$F_{\dot{x}_i \dot{x}_i} \geq 0 \quad F_{\dot{u}_j \dot{u}_j} \geq 0 \quad (14.33)$$

Обикновено в реалните системи съществуват някакъв вид ограничения и тогава в уравненията на Ойлер вместо функцията F се записва функцията H

$$H = F + \sum_{k=1}^l \lambda_k(t) P_k, \quad (14.34)$$

където $\lambda_k(t)$ -произволни множители на Лагранж, в най-общия случай зависещи от времето. Тази задача е от класа задачи с така наречения условен екстремум, тъй като има наложени ограничения върху системата.

В случая на една единствена променлива, ако функционалът съдържа производни по

от по-висок ред-например

$$I_k = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}, u, \dot{u}) dt, \quad (14.35)$$

То уравненията на Ойлер се записват

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_{ij}} + \dots (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{x^{(n)}} = 0 \quad (14.36)$$

$$F_{u_j} - \frac{d}{dt} F_{\dot{u}_j} = 0 \quad (14.37)$$

При наличие на ограничения вместо функцията F се записва функцията H .

14.4. Метод на динамичното програмиране

Методът на динамичното програмиране е разработен от Р. Белман при оптимизация на системи за управление приложими за различни икономически и технически задачи. При този метод се предполага, че функционалът за качество е диференцируема функция на фазовите координати на системата. Приема се, че работата на системата се описва от система от n диференциални уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \quad i=1 \dots n \quad j=1 \dots m, \quad /y/ \quad (14.38)$$

където f_i -нелинейни функции на своите аргументи.

Критерият за оптималност се приема във вида:

$$I = \int_0^T f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) dt \quad (14.39)$$

Функциите f_i, f_0 в най-общия случай могат да са функции и на времето t , но това не променя постановката на задачата.

Целта на управлението е да преведе системата от началното състояние $x_i(0) = a_i$ до крайното $x_i(T) = b_i$. Такава задача на управление се нарича терминална и съответства на определянето във фазовото пространство на оптимална траектория с фиксирани краища.

$$x_i(t) \in X \quad u_j(t) \in U \quad x_i(0) = a_i \in R_0 \quad x_i(T) = b_i \in R_T \quad 0 \leq t \leq T. \quad (14.40)$$

Минимумът на функционала (14.39) зависи от началния момент на времето t_0 и началната точка $x_{i0} = x_i(0)$. Означава се този минимум с $\varphi(x_0)$. За някои съвкупности от фазови координати функцията $\varphi(x_0)$ може да не съществува, тъй като може да не съществува и допустимо управление удовлетворяващо уравнение (14.39).

Ако е намерена функцията $\varphi(x_0)$ и необходимото управление $u(t, x_0)$, то като се положи $t_0 = 0$ и $x_i(0) = a_i$ се получава решението на изходната задача.

14.5. Уравнение на Белман

Предполага се, че функцията φ има непрекъснати частни производни по всичките си аргументи $t, x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогава функцията $\varphi(t + \Delta t, x + \Delta x)$ може да се представи по следния начин:

$$\varphi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \varphi(t, x) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] \Delta t + \delta(\Delta t) \Delta t, \quad (14.41)$$

където $\delta(\Delta t)$ -величина по-малка от по-висок ред спрямо величината Δt . Влизащите в дясната част на функцията (14.41) производни $\dot{x}_i$ удовлетворяват уравнение (14.39). Поради това

$$\varphi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \varphi(t, x) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i \right] \Delta t + \delta(\Delta t) \Delta t. \quad (14.42)$$

Функцията $\varphi(t, x)$ не зависи от управлението $u(t)$ в момента t . Поради това тя може да се изнесе зад знака минус. Като се раздели равенството на Δt и се премине към граничен преход при $\Delta t \rightarrow 0$ се получава:

$$\min_u \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i[x(t), u(t)] + f_0[x(t), u(t)] \right\rangle = 0 \quad (14.43)$$

при условия

$$\dot{x}_i = f_i(x, u) \quad x_i(0) = a_i \quad x_i(T) = b_i \in R_T \quad x_i(t) \in X \quad 0 \leq t \leq T. \quad (14.44)$$

Горното уравнение се нарича уравнение на Белман с гранични условия $\varphi(T, x) = 0$. Сумата от първите два члена на (14.43) представлява пълната производна на функцията $\varphi(t, x)$ по времето. Затова уравнението на Белман може да се запише във формата:

$$\min_u \left\langle \frac{d\varphi}{dt} + f_0[x(t), u(t)] \right\rangle = 0. \quad (14.45)$$

Изискването за непрекъснатост и диференцируемост на функцията $\varphi(t, x)$ е твърдо и в много от задачите не се изпълнява. Трябва да се отбележи, че ако функциите f_0 и f_i не зависят явно от времето, то решението на уравнение /y1/

- функцията φ и оптималното управление u , което осъществява минимума на (14.43) също не зависи явно от времето, т.е. $\varphi = \varphi(x)$ и $u = u(x)$, макар че в общия случай $\varphi(t, x)$ и $u = u(t, x)$.

14.6. Аналитично конструиране на регулатори

Разглеждаме стационарен обект уравненията, на който в матрична форма се записват

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Cu, \quad (14.46)$$

където

$\vec{x} = \|x_i\|_{n \times 1}$, матрица стълб на фазовите координати, $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ - квадратна матрица на коефициентите, $C = \|c_i\|_{n \times 1}$ - матрица стълб на коефициентите, u - скалярна величина.

Иска се да се определи оптималното управление $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ минимизиращо функционала за оптималност

$$I = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \alpha u^2 \right) dt = \int_0^{\infty} V dt \quad (14.47)$$

$$b_i \geq 0, \alpha > 0, i = 1..n.$$

Задачата за управлението се свежда до това да се преведе системата от началното $x_i = a_i, t > 0$ до крайно $x_i = 0, t \rightarrow \infty$ състояния. От горната формулировка следва, че системата трябва да бъде асимптотически устойчива.

В разглеждания случай уравнението на Белман има вид:

$$\min_u \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + c_i u \right) + \sum_{j=1}^n b_j x_j^2 + \alpha u^2 \right] = 0. \quad (14.48)$$

Оказва се, че функцията φ , влизаща в уравнение (14.48) е функция на Ляпунов, а функцията V във функционала-нейната първа производна по времето.

$$\frac{d\varphi}{dt} = -V, \quad (14.49)$$

което решава въпроса за устойчивостта на работа на системата.

Тъй като няма наложени ограничения върху управлението u и $\alpha > 0$ то минимума на (14.48) се достига в точка, където се обръща в нула производната на уравнението по u . От това условие се определя

$$u = -\frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (14.50)$$

Ако горното се замести в /м/ се получава:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 - \frac{1}{4\alpha} \left(\sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \quad (14.51)$$

Полученото уравнение е нелинейно, в частни производни спрямо функцията φ . Решението на уравнението се търси във вид на квадратични форми от фазовите координати.

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \gamma_{kr} x_r x_k = \bar{x}' G \bar{x} \quad , \quad (14.52)$$

където $G = \|\gamma_{kr}\|_{n \times n}$ -квадратична матрица на коефициентите, удовлетворяваща критерия на Силвестър

$$\gamma_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} \dots \gamma_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ \gamma_{21} \dots \gamma_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (14.53)$$

Приема се матрицата за симетрична т.е. $\gamma_{kr} = \gamma_{rk}$.

Функцията (14.53) удовлетворява граничните условия, тъй като при $x_i = 0$, $i = 1 \dots n \rightarrow \varphi = 0$. След диференциране на /ц/ се получава

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2 \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k. \quad (14.54)$$

Ако се замени горното уравнение в/л/ се достига до :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} a_{ij} x_k x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_i \gamma_{ik} x_k \right)^2 = 0. \quad (14.55)$$

В лявата му част се съдържат квадратични форми на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sum_{i=1}^n (\gamma_{ik} a_{ij} + \gamma_{ij} a_{ik}) - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n c_i \gamma_{ik} \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ij} = 0 \quad j \neq k \quad (14.56)$$

$$2 \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} a_{ik} + b_k - \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ik} \right)^2 = 0 \quad j = k \quad j, k = 1 \dots n. \quad (14.57)$$

Горните уравнения са тъждествено равни на нула при равенство на нула на всичките им коефициенти. В резултат се получава система от $0.5n(n+1)$ уравнения с толкова на брой неизвестни коефициенти γ_{ik} /при отчитане, че $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ /.

След определяне на неизвестните коефициенти може да се определи и оптималното управление:

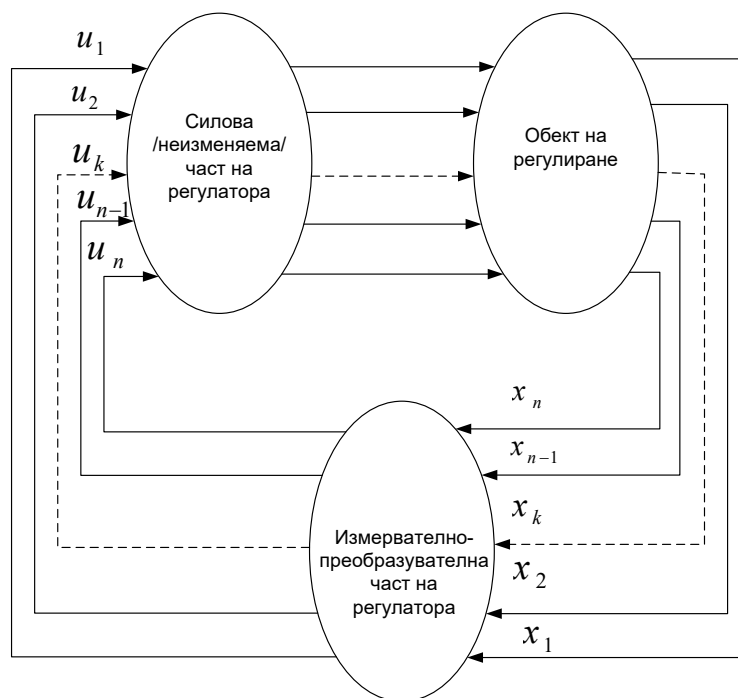
$$u = -\frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n d_k x_k, \quad d_k = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_{ik}. \quad (14.58)$$

14.7. Нелинейна оптимизация на автоматичните системи. Принцип на Максимумите.

По-горе беше показана линейната постановка за синтез на оптимални системи за автоматично регулиране. В повечето случаи на реални системи обаче, когато има наложени ограничения върху работата на системата синтезираният оптимален закон се оказва нелинеен. Това се отнася и за

случаите, когато обекта на регулиране се описва от линейни диференциални уравнения. Тогава, като цяло, автоматичната система става нелинейна. Поставя се задачата за синтез на такъв закон на регулиране, който да оптимизира работата на системата по зададен критерий за оптималност и при това този закон да е нелинеен.

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (14.59)$$



Фиг. 14.3. Нелинейна САР

Съществуват различни методи за нелинейна оптимизация. Един от най-често използваните е така нареченият Принцип на максимумите, разработен от Л. С. Понтрягин. По-долу ще бъде изложен накратко подходът за синтез на оптимален закон, като се използва този принцип. Предполага се, че уравненията описващи динамиката на системата имат вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (14.60)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Приема се, че горната система е нелинейна, с постоянни коефициенти и без наличие на външни смущаващи въздействия. Променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ са фазови координати, които определят поведението на неизменяемата част на системата, включваща обекта на регулиране и неизменяемата в процеса на синтез част на регулатора /силовата част на регулатора/.

Променливите $u_1, u_2, \dots, u_m$ определят въздействията на проектируемата част /измервателно-преобразователната част / на регулатора. Тези въздействия се определят в процеса на синтез във вид на закон на регулиране.

$$u_j = u_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14.61)$$

Обикновено в реалните системи са наложени ограничения върху управленията, например от вида:

$$|u_j| \leq 1. \quad (14.62)$$

Критерият за оптималност на системата може да се зададе например във вида:

$$I = \int_0^T f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) dt, \quad (14.63)$$

За удобство на решението се въвежда нова променлива според зависимостта

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (14.64)$$

а също така спомагателните променливи $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, които се определят от линейните однородни уравнения

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)}{\partial x_i} \varphi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14.65)$$

Ако се въведе спомагателна функция

$$H(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) = - \sum_{k=1}^n \varphi_k f_k(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

то всички уравнения (14.63), (14.64) и (14.65) могат да се обединят в система от уравнения на Хамилтон, записана по-долу

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (14.66)$$

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14.67)$$

След горните преобразувания, принципът на максимумите може да се дефинира по следния начин: *За оптималността на системата /получаване на минимум на избрания критерий за оптималност/ е необходимо да съществуват такива ненулеви, непрекъснати функции $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, така че за всяко t намиращо се в зададен интервал $t_0 \leq t \leq t_1$ величината H като функция на променливите $u_1, u_2, \dots, u_m$ в зададената област на допустими стойности да достига масималната си стойност*

$$H = M(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (14.68)$$

при което φ_0 и M да са постоянни във времето и

$$\varphi_0 \leq 0, M = 0. \quad (14.69)$$

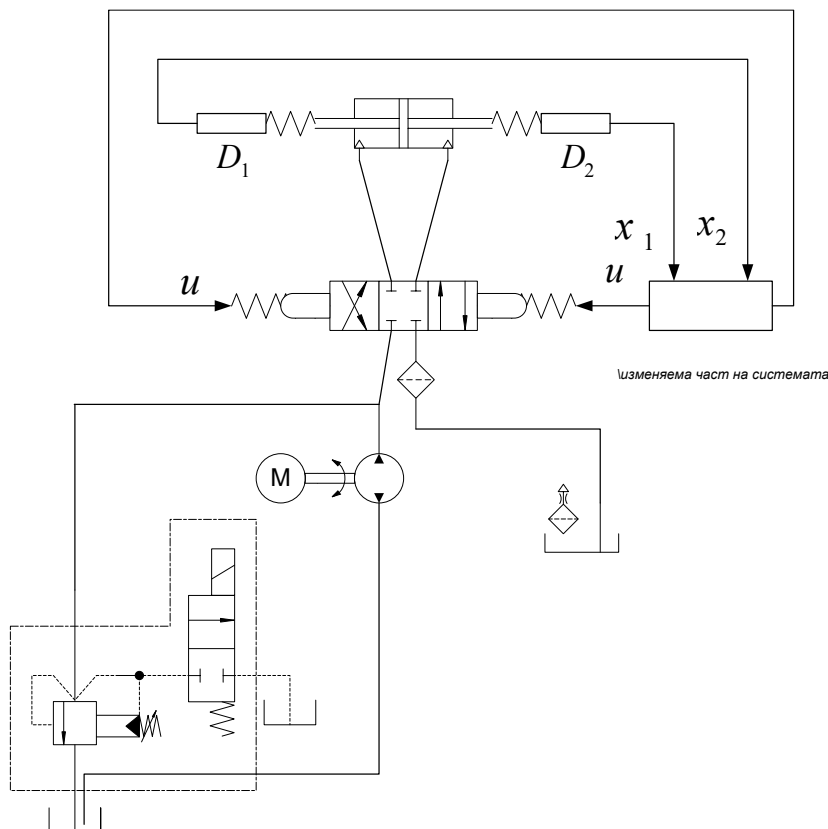
Пример 14.3: Разглежда се обект състоящ се от хидравличен цилиндър и разпределител захранвани от съответна хидростанция - фиг. 14.4.

Уравненията на неизменяемата част на система имат вид:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k_{tr} \frac{dy}{dt} + c_T y = S_b p_n$$

$$Q = k_x x - k_p p_n$$

$$Q = S_b \frac{dy}{dt} + \frac{V_0}{2E} \frac{dp_n}{dt},$$



Фиг. 14.4. Хидравлична система към Пример 14.3.

Ако се въведат променливи на състоянието по схемата:

$$x_1 = y,$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt},$$

$$x_3 = \frac{dp_n}{dt},$$

се получава системата от уравнения:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$\dot{x}_3 = -a_{32}x_2 - a_{33}x_3 + b_3u,$$

където: $x_1 = y$ - преместване буталото на хидроцилиндъра, $x_2 = \frac{dy}{dt}$ - скорост на преместване буталото на хидроцилиндъра, m - маса на товара на цилиндъра, k_{tr} - коефициент на хидравлично триене, c_T - коефициент на натоварване, p_n - разлика от наляганията върху буталото на цилиндъра, Q - дебит подаван към

цилиндъра, k_p - коефициент на преместване на плунжера, k_x - коефициент на налягане, V_0 - обем на цилиндъра, E - приведен модул на еластичност, S_b - лице на буталото на цилиндъра, u - управляващо въздействие подавано към плунжера на разпределителя, a_{ij}, b_3 - константи.

Ако не се отчитат свиваемостта на маслото и еластичността на буталния прът $E \rightarrow \infty$, уравненията се опростяват и записват във вида:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_{21}x_1 - \bar{a}_{22}x_2 + \bar{b}_3u$$

Поставя се задачата да се синтезира оптимален закон на управление на системата минимизиращ следния критерий за качеството

$$I = \int_0^t [q_{22}x_2^2 + \alpha u^2] dt = \int_0^t F_0(x_2, u) dt$$

при следните ограничения върху управлението и фазовите координати:

$$|x_1| \leq x_{1\max} \quad |x_2| \leq x_{2\max} \quad |u| \leq u_{\max}.$$

Ако се означат с

$$F_1 = x_2 \quad F_2 = -a_{21}x_1 - \bar{a}_{22}x_2 + \bar{b}_3u$$

За функцията на Хамилтон се записва

$$H = \varphi_0 F_0 + \varphi_1 F_1 + \varphi_2 F_2 = \varphi_0 [q_{22}x_2^2 + \alpha u^2] + \varphi_1 [x_2] + \varphi_2 [-a_{21}x_1 - \bar{a}_{22}x_2 + \bar{b}_3u].$$

Спрегнатите уравнения се определят от:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = a_{21}\varphi_2$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 2\varphi_0 q_{22}x_2 - \varphi_1 + \bar{a}_{22}\varphi_2.$$

В резултат се получава система от диференциални уравнения

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_{21}x_1 - \bar{a}_{22}x_2 + \bar{b}_3u$$

$$\dot{\varphi}_0 = 0$$

$$\dot{\varphi}_1 = a_{21}\varphi_2$$

$$\dot{\varphi}_2 = 2\varphi_0 q_{22}x_2 - \varphi_1 + \bar{a}_{22}\varphi_2.$$

Управлението се определя от условието за достигане максимум на функцията на Хамилтон

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2\varphi_0 \alpha u + \varphi_2 \bar{b}_3 = 0.$$

От уравнението $\dot{\varphi}_0 = -0$ се определя $\varphi_0 = \text{const} = -1$ /избира се обикновено $\varphi_0 = -1/$.

Тогава

$$u = \frac{\varphi_2 \bar{b}_3}{2\alpha}.$$

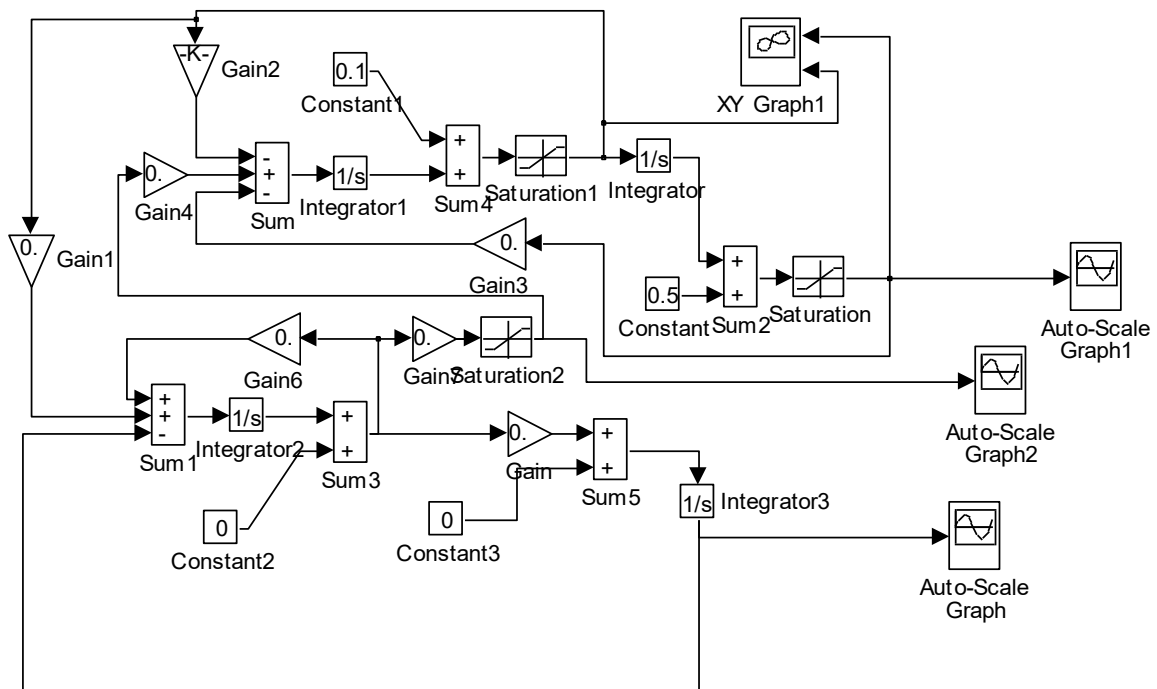
Производната

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\alpha < 0$$

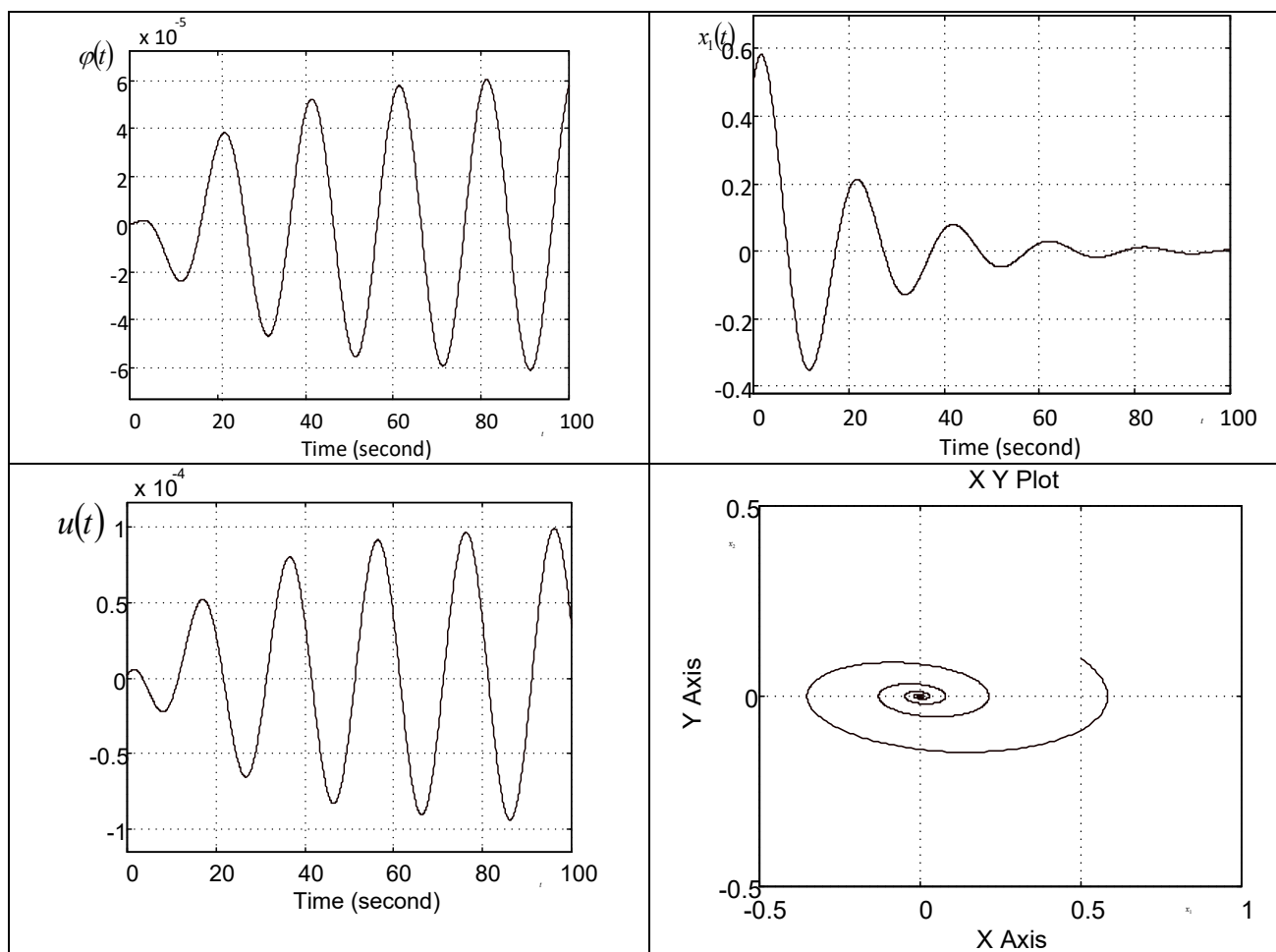
е отрицателна, което показва, че получената стойност на управлението съответства на максимума на функцията на Хамилтон, т.е. полученото решение е оптималното.

Началните условия за решението са: $x_1(0) = x_{10}$, $x_1(t_k) = x_{1k}$, $x_2(0) = x_{20} = 0$, $x_2(t_k) = x_{2k} = 0$

Задачата е решена с помощта на програмата Simulink от програмния пакет на Matlab. Схема на решението е показана на фиг. 14.5, а графики на преходните процеси по фазовите координати и управлението, както и фазова траектория на фиг. 14.6.



Фиг. 14.5. Симулационна схема на Пример 14.3



Фиг. 14.5. Графики на преходните процеси по фазовите координати и управлението, и фазова траектория Пример 14.3

ГЛАВА 15

ОПИСАНИЕ НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ В ПРОСТРАНСТВОТО НА СЪСТОЯНИЯТА

Описанието на система в пространство на състоянията в редица случаи е по-аналитично в сравнение с традиционните модели – обикновени диференциални уравнения и предавателни функции. Преди да се изложи формалния апарат на този тип описания, трябва да се въведат някои основни понятия: състояние на системата, променливи на състоянието, пространство на състоянията и др.

Понятието „състояние” е основно /аксиоматично/ и не може да се дефинира с по-прости категории. *Под състояние на системата $x(t)$ се разбира съвкупност от величини, които напълно и еднозначно определят поведението на системата в определен момент от времето.* От тук следва, че ако е известно състоянието на системата в даден момент от време t_0 и е известно входното въздействие $u(t)$ в интервала от време $[t_0, t]$ то изходната величина $y(t)$ е еднозначно определена. Състоянието на системата в момента от време t_0 съдържа в себе си цялата информация за поведението на системата до момента t_0 и такъв смисъл от него еднозначно зависи поведението на системата в бъдещето /при $t > t_0$ /.

Състоянието на системата в произволен момент от времето t се описва с n -мерен вектор на състоянието:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \text{ или } \mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)]^T \quad (15.1)$$

където - $x_i(t)$ - са компоненти на вектора на състоянието, $i = 1, 2, \dots, n$, които се наричат *променливи на състоянието или фазови координати.*

Разглежда се система с m входни величини $u_1(t) - u_m(t)$; l - изходни величини $y_1(t) - y_l(t)$.

Въвежда се съответно вектора на входа и вектора на изхода

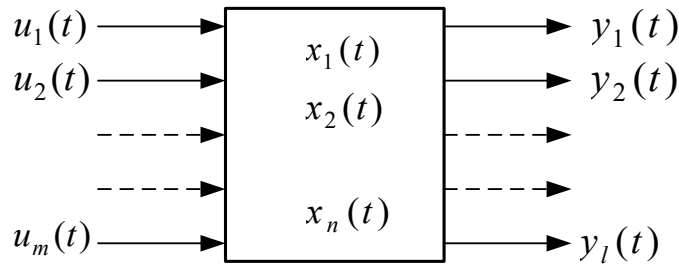
$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T - m\text{-мерен вектор на входа} \quad (15.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_l(t)]^T - l\text{-мерен вектор на изхода} \quad (15.3)$$

Множеството от всички значения, които може да приеме вектора на входа $\mathbf{u}(t)$ в момента от време t образува *пространството на входа на системата.*

Множеството от всички значения, които може да приеме вектора на изхода $\mathbf{y}(t)$ в момента от време t образува *пространството на изхода на системата.*

Множеството от всички значения, които може да приеме вектора на състоянието $\mathbf{x}(t)$ в момента от време t образува *пространството на състоянието на системата*.



Фиг. 15.1 Представяне на САУ в пространството на състоянията

Пространството на състоянието е линейно пространство, всеки елемент от който напълно и еднозначно определя състоянието на разглежданата система. Двойката $(\mathbf{x}, t)$, където $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ и $t \in T$ се нарича фаза /събитие/ на системата. С $\mathbf{X}$ е означено пространството на състоянията, а с T - времето за наблюдение на системата. Множеството $\mathbf{X} \times T$ дефинира пространството на събитията.

Известното в класическата теория на управлението фазово пространство на системата съвпада с $\mathbf{X}$.

Изборът на n^{me} - променливи на състоянията може да се извърши по различен начин.

15.1. Уравнение на състоянието. Уравнение на изхода

Разглежда се линейна непрекъсната стационарна система от n^{th} ред с диференциално уравнение:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_n u. \quad (15.4)$$

По-нататък се приема, че $a_0 = 1$.

Линейната система се описва еднозначно с уравнение (15.4), ако са зададени и началните условия $y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, $\ddot{y}(t_0)$, $\dots$, $y^{(n-1)}(t_0)$

На уравнение (15.4) съответства предавателна функция

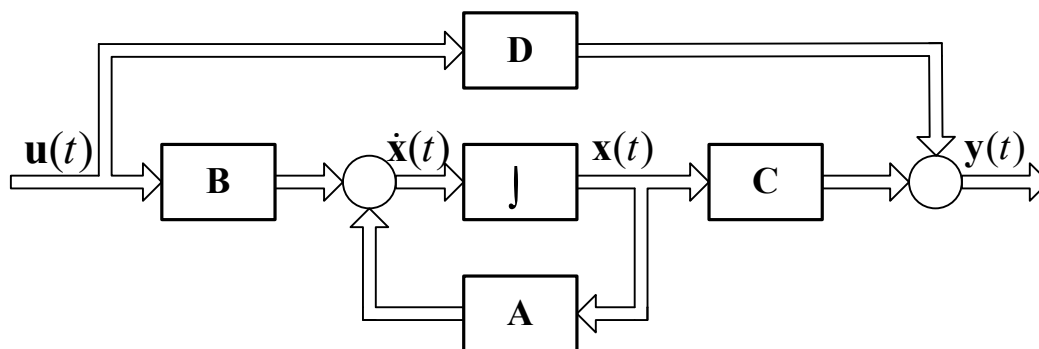
$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (15.5)$$

Многомерна система с m входа и l изхода се описва със система диференциални уравнения от типа (15.4) и $m \times l$ предавателни функции от типа (15.5). Ако се въведат n линейно независими променливи $x_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, n$ описанието на многомерната система може да се представи със следните векторно - матрични уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (15.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (15.7)$$

като началните условия за (15.6) се задават с вектора $\mathbf{x}(t_0)$.



Фиг. 15.2 Блок схема на пространството на състоянията

Уравнение (15.6) се нарича уравнение на състоянието. То представлява система ДУ от $I^{-\text{та}}$ ред. Уравнение (15.7) се нарича уравнение на изхода или уравнение на наблюдението.

На системата уравнения (15.6) и (15.7) съответства блок-схема, която е показана на фиг. 15.2.

Матриците имат размерност:

$\mathbf{A}$ - $n \times n$ - матрица на състоянието

$\mathbf{B}$ - $n \times m$ - матрица на входа

$\mathbf{C}$ - $l \times n$ - матрица на изхода

$\mathbf{D}$ - $l \times m$

Обикновено $\mathbf{D}=0$ т. е. няма директна връзка между изхода и входа.

Матриците $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ имат вида:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix}.$$

Частен случай: $m=1$ и $l=1$ (едномерна система). В този случай уравнението на състоянието и на изхода са от вида:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (15.8)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (15.9)$$

където $u(t)$, $y(t)$ - скаларни величинини

$\mathbf{A} - n \times n$;
 $\mathbf{B} - n \times 1$ (вектор-стълб);
 $\mathbf{C} - 1 \times n$ (вектор-ред);
 $D = d$ - скалар

15.2. Промяна на базиса в пространството на състоянията

От начена на дефиниране на променливите на състоянието следва, че описанието в пространството на състоянията не е единствено. За всяка система от n -ти ред, винаги могат да се намерят нови n независими вектора които определят нов базис и определят нови форми на матриците $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Какъв базис ще се използва зависи от решаваната задача, от удобствата които предлага съответната форма на матриците.

Промяната в базиса се извършва чрез неособеното преобразование на вектора на състоянието

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}} \text{ или } \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} \quad (15.10)$$

където $\mathbf{P}$ е преобразуващата неособена матрица с размерност $n \times n$, а $\hat{\mathbf{x}}$ е векторът на състоянието в новия базис.

Като се замести съотношението (15.10) в (15.6) и (15.7) следва

$$\mathbf{P} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \mathbf{u}$$

или

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \mathbf{u}$$

където новите матрици се получават чрез неособените преобразувания

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P} \quad (15.11)$$

15.3. Канонични описания на едномерни системи .

Това са описания в пространството на състоянията, при които матрицата $\mathbf{A}$ съдържа възможно най-малък брой елементи, различни от нула или единица.

а) Съпровождаща канонична форма

Нека системата е описана в линейното диференциално уравнение

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 u(t). \quad (15.12)$$

Променливите на състоянието се въвеждат по схемата:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

.....

$$x_n = y^{(n-1)}$$

Уравнението (15.12) може да се преобразува по схемата

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

.....

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + b_0 u$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$$

където:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

В разгънат вид уравнението на състоянието има вида:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (15.13)$$

Може да се представи и във вида:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} b_0 u; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15.14)$$

Уравнението на изхода е:

$$y = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (15.15)$$

или

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}; \quad D = d = 0 \quad (15.16)$$

Тази форма на матриците е известна като *съпровождаща, стандартна форма*.

Пример 15.1: Да се представи в стандартна канонична форма системата, описана с диференциалното уравнение:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + 3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 7u(t)$$

Решение:

Избират се променливите на състоянието по схемата

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

$$x_4 = \ddot{y}$$

След преобразуване се получава:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 7u$$

Като се използва векторно матричното преобразование, тези четири диференциални уравнения от първи ред могат да се комбинират в едно:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} [u]$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 7[u]$$

Уравнението на изхода е:

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Уравненията може да се обобщят от стандартната форма:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$$

$$y = \mathbf{C} \mathbf{x}$$

където

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ или } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Стандартната, съпровождаща канонична форма може да се обобщи и за системи с производни и от входното въздействие /при еднакъв ред на производните в лявата и дясна част на диференциалното уравнение $n=m$ /:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_n u. \quad (15.17)$$

Когато в дясната част на диференциалното уравнение редът е по нисък $n > m$, съответните коефициенти се полагат равни на нула - $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots = 0$

Променливите на състоянието могат да се въведат и по схемата:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u, \end{aligned}$$

където коефициентите $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ се определят от

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_n &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \end{aligned}$$

Коефициентите β_i се изчисляват по рекурентната формула:

$$\beta_i = b_i - \sum_{k=1}^i a_k \beta_{i-k} \quad i = 1, 2, \dots, n; \beta_0 = b_0 \quad (15.18)$$

С така представената схема на избор на променливи на състоянието /фазови координати/ се получават съответното уравнение на състоянието и уравнението на изхода /наблюдението/:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + \beta_0 u \\ \dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \end{aligned}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$$

.....

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - a_{n-2} x_3 - \dots - a_1 x_n - \beta_n u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u;$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \quad (15.19)$$

$$y = \mathbf{C} \mathbf{x} + D u \quad (15.20)$$

където

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]; D = \beta_0 = b_0.$$

В това представяне в пространството на състоянията, матрицата $\mathbf{A}$ е същата както в уравнение (15.14) производните в дясната страна на уравнението (15.14) се отразяват само на елементите на матрицата $\mathbf{B}$.

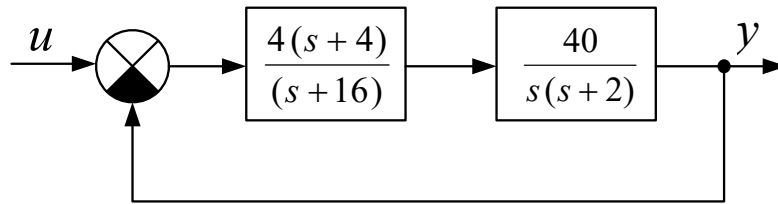
Ако системата е зададена с предавателна функция от вида

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

то в пространството на състоянията представянето ѝ също става с уравненията (15.19) и (15.20).

Пример 15.2.

Системата показана на фиг. 15.3 да се представи в пространство на състоянията.



Фиг. 15.3 Система към Пример 15.2

Предавателната функция на затворената система от фиг. 15.3 е:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{160(s+4)}{s^3 + 18s^2 + 192s + 640}$$

Съответното диференциално уравнение е:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 18 \frac{d^2 y}{dt^2} + 192 \frac{dy}{dt} + 640y = 160 \frac{du}{dt} + 640u$$

Въвеждат се променливите на състоянието:

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

където коефициентите $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ се определят от

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = 160$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 = -2240$$

Уравнението на състоянието е:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

Уравнението на наблюдението е:

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

15.4. Модели в пространство на състоянията получени от предавателната функция на системата.

Ще се представят два метода известни които използват техниката за директно програмиране и паралелното програмиране.

Използване на техниката на директното програмиране и управлява канонични форми:

Предавателната функция на системата е:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

В пространството на състоянията може да се представи тази предавателна функция в управляема канонична форма, наблюдаема канонична форма и диагонална /Джорданова/ канонична форма.

Управляема канонична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (15.21)$$

$$y = [b_n - a_n b_0; \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0; \quad b_{n-2} - a_{n-2} b_0; \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (15.22)$$

Управляемата канонична форма се използва при синтез на автоматични системи при желани полюси.

Наблюдаема канонична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \quad (15.23)$$

$$y = [0; \quad 0; \quad 0; \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (15.24)$$

Може да се забележи, че матрицата $n \times n$ уравнение 15.23 е транспонираната матрица от 15.21.

Диагонална канонична форма:

Може да се представи предавателната функция

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} = b_0 + \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \dots + \frac{c_n}{s - s_n}$$

Диагоналната канонична форма се представя с:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (15.23)$$

$$y = [c_1; \quad c_2; \quad c_3; \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (15.24)$$

Пример 15.3:

Системата се представя с предавателната функция:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Да се получат управляемата канонична форма, наблюдаемата канонична форма и диагоналната канонична форма

Управляема канонична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Наблюдаема канонична форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Диагонална канонична форма:

Корените на уравнението $s^2 + 3s + 2$ са $s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2}}{2}$

$$s_1 = -1; s_2 = -2$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

$$c_1 = \lim_{(s \rightarrow -1)} \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \lim_{(s \rightarrow -1)} \frac{(s+3)}{(s+2)} = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$$

$$c_2 = \lim_{(s \rightarrow -2)} \frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \lim_{(s \rightarrow -2)} \frac{(s+3)}{(s+1)} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

15.6. Формула на Коши. Преходна матрица

Решението на матричната диференциално уравнение $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$ може да се намери чрез същия подход, който се използва за определяне на решението на скаларното линейно диференциално уравнение.

Предполага се, че решението е от вида:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(t), \quad (15.25)$$

което за началния момент дава:

$$\mathbf{x}(t_0) = e^{\mathbf{A}t_0} \mathbf{z}(t_0).$$

Ако (15.25) се диференцира

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(t) + e^{\mathbf{A}t} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}t} \dot{\mathbf{z}}(t)$$

и се замести в уравнението на състоянието следва

$$\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}t} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t);$$

$$e^{\mathbf{A}t} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{B} \mathbf{u}(t);$$

което означава, че (15.25) е решение на $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$, ако

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{u}(t),$$

или след като се интегрира

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = e^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Ако този израз се замести в (15.25) се получава търсеното решение

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (15.26)$$

Това е формулата на Коши.

Като се използва формулата на Коши и уравнението на изхода $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$ може лесно да се определи и изходния сигнал на системата:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (15.27)$$

Матричната експонента $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ се нарича преходна матрица и е една от най-важните характеристики на линейната система. Използва се означението $\Phi(t-t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$

Основните свойства на преходната матрица са:

$$1. e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{I} - \text{единична матрица} \quad (15.28)$$

Това следва от свойството на матричната експонента $e^0 = \mathbf{I}$

$$2. e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = e^{\mathbf{A}(t-t_1)} e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)} \quad (15.29)$$

$$3. \Phi^{-1}(t-t_0) = \Phi(t_0-t) \quad (15.30)$$

$$4. \det \Phi(t-t_0) = e^{(t_0-t)tr\mathbf{A}} \quad (15.31)$$

където $tr\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ следата на матрицата $\mathbf{A}$ - сумата от елементите по главния диагонал.

$$5. \dot{\Phi}(t-t_0) = \mathbf{A}\Phi(t_0-t) \quad (15.32)$$

15.6. Изчисляване на преходната матрица

Съществуват много методи за изчисляване на преходната матрица. Най-голямо приложение имат изчисляването чрез оператора на Лаплас и представяне на матричната експонента в ред на Тейлор.

1. Изчисляване на преходната матрица чрез оператора на Лаплас

Ако хомогенното уравнение на състоянието

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$$

се преобразува по Лаплас при нулеви начални условия

$$s \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{x}(s) \quad \text{или} \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0),$$

се получава

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0).$$

От където следва

$$e^{\mathbf{A}t} = L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} = \left\{ \frac{adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \right\} \quad (15.32).$$

Преходната матрица $\Phi(t_0-t)$ се получава като в (15.32) се замени t с (t_0-t) .

Този метод е приложим при системи от нисък ред, като основното му преимущество е, че дава решение в аналитичен вид.

2. Изчисляване на преходната матрица чрез представяне на матричната експонента в ред на Тейлър.

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k \quad (15.33)$$

Броят на използваните при практическите изчисления членове на реда зависи от желаната точност и големината на нормата на матрицата.

15.7. Матрична предавателна функция

За определяне на матрицата от предавателни функции, която се нарича матрична предавателна функция се намира изображението по Лаплас на нехомогенното матрично диференциално уравнение при нулеви начални условия

$$s \mathbf{x}(s) = \mathbf{A} \mathbf{x}(s) + \mathbf{B} \mathbf{u}(s)$$

Намира се изображението по Лаплас и на уравнението на изхода

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{x}(s) + \mathbf{D} \mathbf{u}(s)$$

и се изключва междинната променлива $\mathbf{x}(s)$:

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{u}(s) = \mathbf{W}(s) \mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (15.34)$$

Получения израз е матричната предавателна функция и представлява матрица, чиито (i, j) -ти елемент е предавателна функция на описваната система за i - тия изход но отношение на j -тия вход.

Матричната предавателна функция може да се определи и чрез преходната матрица:

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C} L\{e^{\mathbf{A}t}\} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (15.35)$$

Пример 15.4:

Да се определи матричната предавателна функция на системата от фиг.

$$\dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 + 2u$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 + 5u$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

Във векторно матрична форма се определя:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Предавателната функция на системата е:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B, \text{ като } D = 0$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)(s+4)} & \frac{-1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{3}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{12s+59}{(s+2)(s+4)}$$

15.8. Управляемост и наблюдаемост на линейни динамични системи

Управляемост на линейните системи

Важна роля в анализа и синтеза на системите за управление има понятието *управляемост*.

Системата се нарича напълно управляема, ако от кое да е начално състояние $x(t_0)$ може да се приведе в кое да е предварителна зададено състояние $x_f(t_0)$ с помощта на управлението $u(t)$ за крайно време $t - t_0 > 0$.

Възможно е да се покаже, че системата

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (15.36)$$

е напълно управляема тогава и само тогава, когато рангът на матрицата на управляемостта P ($n \times nm$) е равен на n , където

$$P \equiv [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B]. \quad (15.37)$$

Значително по-слабо от управляемостта е свойството стабилизируемост. То се състои в това, че под въздействието на обратната връзка всички неустойчиви полюси на системата могат да се направят устойчиви, т. е всички собствени стойности на матрицата на затворената система могат да се направят с отрицателни реални части. Всяка управляема система е стабилизируема.

Пример 15.5.

Система за която

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ е управляема, тъй като}$$

$$\mathbf{P} \equiv [\mathbf{B} : \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{rank } \mathbf{P} = 2.$$

Система за която

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ е неуправляема, тъй като}$$

$$\mathbf{P} \equiv [\mathbf{B} : \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{rank } \mathbf{P} = 1.$$

15.9. Наблюдаемост на линейни системи

Системата се нарича напълно наблюдаема, ако произволно състояние $x(t_0)$ може да се определи по информация за управлението $u(t)$ и изхода $y(t)$ в интервала от време $t_0 \leq t < t_1$.

За линейна стационарна система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (15.38)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \quad (15.39)$$

Може да се покаже, че необходимото и достатъчно условие за пълна наблюдаемост е рангът на матрицата на наблюдаемостта $\mathbf{Q} (n \times nr)$ е равен на n , където

$$\mathbf{Q} \equiv [\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T : (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T : \dots : (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T].$$

По-слабо от наблюдаемостта е свойството *детектируемост*. Системата е детектируема, ако всички нейни неустойчиви процеси са наблюдаеми. Всяка наблюдаема система е детектируема.

Пример 15.6.

Система за която

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{C} = [1 \quad 2] \text{ е напълно наблюдаема, тъй като}$$

$$\text{rank } \mathbf{Q} \equiv [\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 2,$$

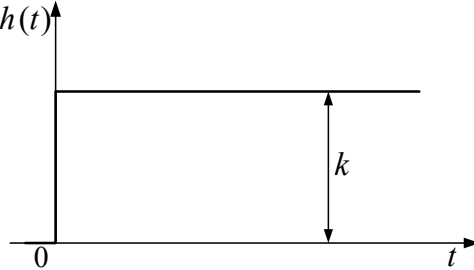
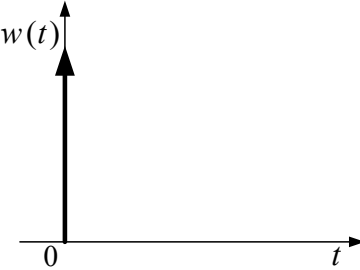
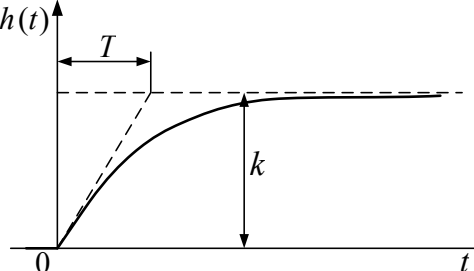
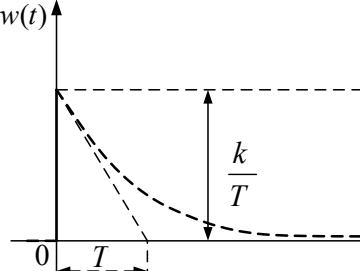
Система за която

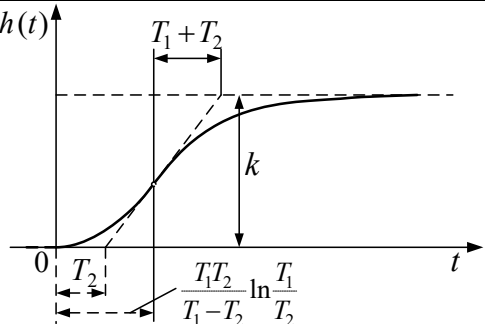
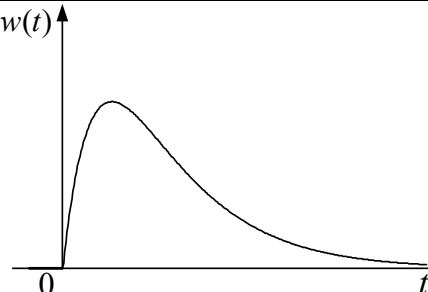
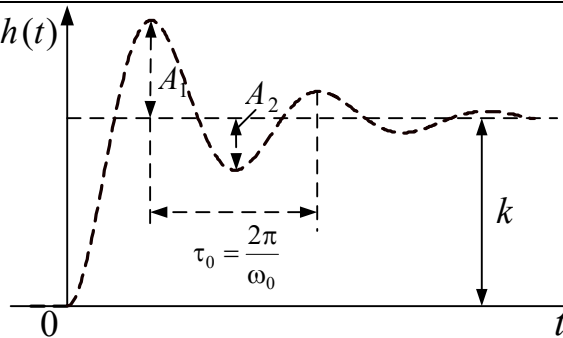
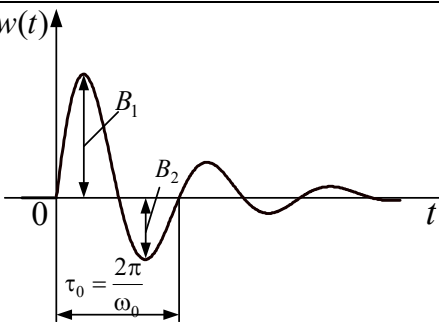
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{C} = [0 \quad 1] \text{ не е напълно наблюдаема, тъй като}$$

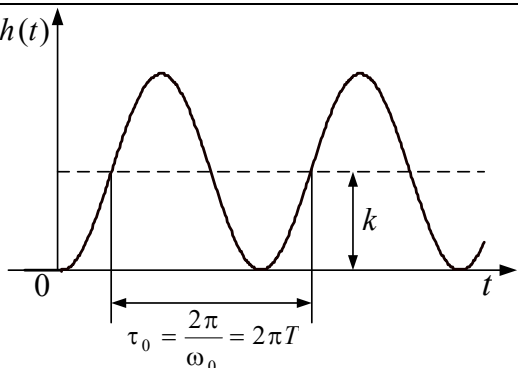
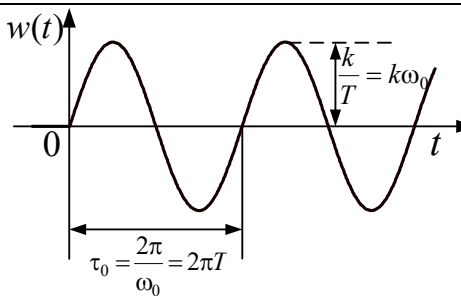
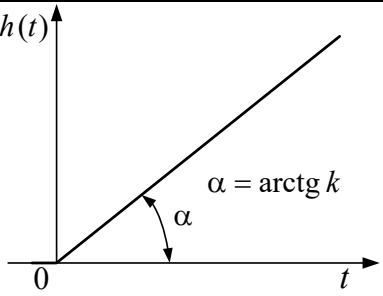
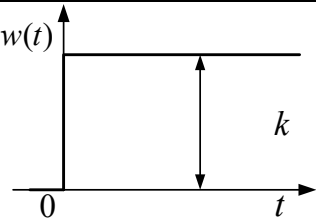
$$\text{rank } \mathbf{Q} \equiv [\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1,$$

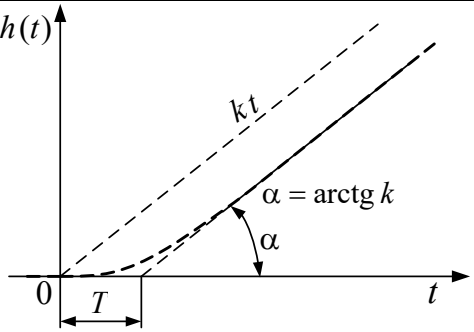
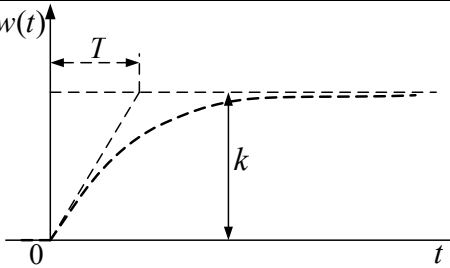
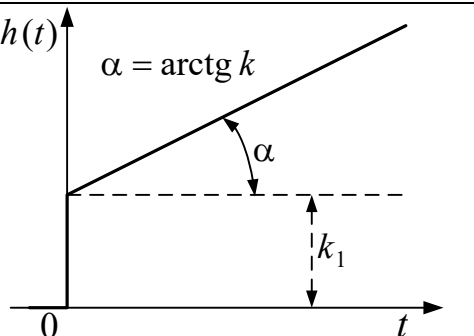
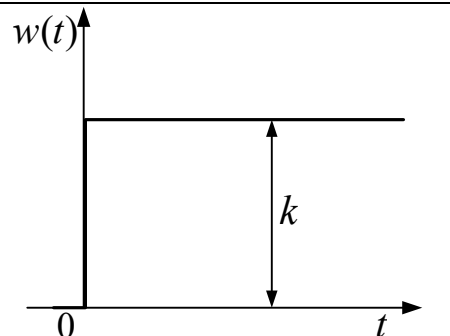
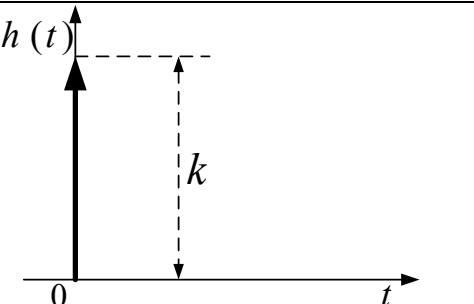
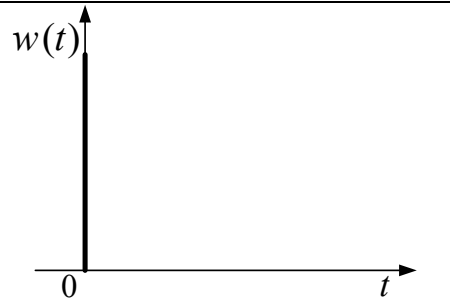
Ако системата е управляема и наблюдаема, то тя е и идентифицируема.

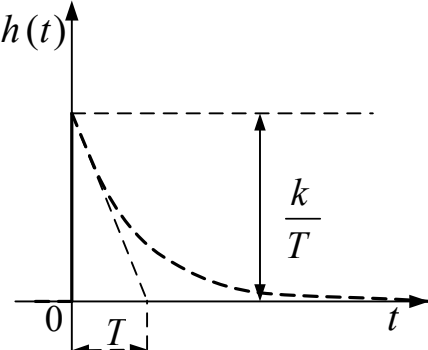
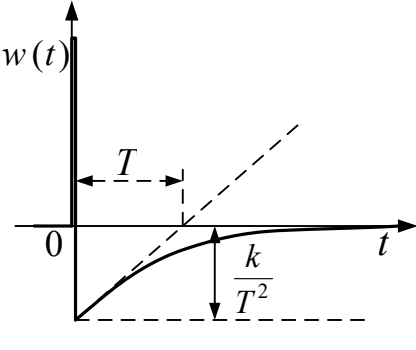
Приложение 1. Динамични типови звена

Наименование и дифференциално уравнение	Предавателна функция $W(s)$	Преходна функция $h(t)$	Тегловна функция $w(t)$
Пропорционално звено $x_2 = k x_1$	$W(s) = k$	 $h(t) = k 1(t)$	 $w(t) = k \delta(t)$
Апериодично от 1 ред $T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k x_1$	$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$	 $h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

Апериодично от 2 ред $T^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k x_1$ $1 \leq \xi < \infty$	$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ $W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $T_1 = -\frac{1}{s_1}; T_2 = -\frac{1}{s_2}$ $T_1 > T_2$ $s_{1,2} = -\frac{2\xi}{T} \pm \frac{2}{T} \sqrt{\xi^2 - 1}$	 $h(t) = k \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right] 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$
$0 \leq \xi < 1$	$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$	 $h(t) = k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin(\omega_0 t) + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] 1(t)$ $h(t) = k \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T} t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_0 t \right) \right] 1(t)$	 $\frac{\xi}{T} = \frac{\omega_0}{\pi} \ln \frac{B_1}{B_2}$ $w(t) = \frac{k}{T \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t$

		$\omega_0 = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \frac{2\pi}{\tau_0}$ $\frac{\xi}{T} = \frac{\omega_0}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2}$	
Консервативно $T^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 = k x_1$	$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}$	 $h(t) = k \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right) 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T} \sin \frac{t}{T}$
Идеално интегриращо $\frac{dx_2}{dt} = k x_1$	$W(s) = \frac{k}{s}$	 $h(t) = k t 1(t)$	 $w(t) = k 1(t)$

Интегриращо закъснение $T \frac{dx_2^2}{dt^2} + \frac{dx_2}{dt} = k x_1$	със $W(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}$	 $h(t) = k \left[t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] 1(t)$	 $w(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t)$
Изодромно $\frac{dx_2}{dt} = k \left(\tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 \right)$	$W(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{s} = k_1 + \frac{k}{s}$ $k_1 = k \tau$	 $h(t) = (k t + k_1) 1(t)$	 $w(t) = k 1(t) + k_1 \delta(t)$
Идеално диференциращо $x_2 = k \frac{dx_1}{dt}$	$W(s) = k s$		

		$h(t) = k \delta(t)$	$w(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}$
Диференциращо закъснение със $T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k \frac{dx_1}{dt}$	$W(s) = \frac{k s}{(Ts + 1)}$	 $h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$	 $w(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$

Приложение 2. Основни преобразувания на Лаплас

	Изображение	Оригинал
1.	$\frac{1}{Ts+1}$	$\alpha e^{-\alpha t}; \quad \alpha = \frac{1}{T}$
2.	$\frac{1}{s(Ts+1)}$	$1 - e^{-\alpha t}; \quad \alpha = \frac{1}{T}$
3.	$\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}); \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1}; \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$
4.	$\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ $T_1 \neq T_2$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}; \quad C_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1};$ $\alpha_1 = \frac{1}{T_1}; \quad C_2 = \frac{T_2}{T_2 - T_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2}$
5.	$\frac{b_0 s^2 + b_1 s + 1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ $T_1 \neq T_2$	$1 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}; \quad \alpha_1 = \frac{1}{T_1};$ $\alpha_2 = \frac{1}{T_2}; \quad C_1 = \frac{b_0 - b_1 T_1 + T_1^2}{T_1(T_2 - T_1)};$ $C_2 = \frac{b_0 - b_1 T_2 + T_2^2}{T_2(T_2 - T_1)}$
6.	$\frac{1}{s \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}$ $n \geq 2; \quad T_i - \text{различни}$	$1 - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}; \quad \alpha_i = \frac{1}{T_i};$ $C_i = \frac{T_i^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (T_i - T_k)}$
7.	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)}$ $0 \leq \xi < 1$	$1 - C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta); \quad C = \frac{1}{\lambda T}; \quad \gamma = \frac{\xi}{T}$ $\lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}; \quad \theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma}$
8.	$\frac{b_0 s^2 + b_1 s + 1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)}$	$1 + C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta)$ $C = \frac{\sqrt{\lambda^2 (b_0 - T^2)^2 + [b_0 - \gamma (b_0 + T^2)]^2}}{\lambda T^2}$

		$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda(b_0 - T^2)}{b_1 - \gamma(b_0 + T^2)}; \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T};$ $\gamma = \frac{\xi}{T}$
--	--	--

	Изображение	Оригинал
9	$\frac{1}{s \prod_{i=1}^n (T_i^2 s^2 + 2\xi_i T_i s + 1)}$ $n \geq 2$ $0 \leq \xi_i < 1$ $\gamma_i = \frac{\xi_i}{T_i} - \text{различни}$	$1 - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\gamma_i t} \sin(\lambda_i t + \theta_i);$ $C_i = \frac{T_i^{2n-3}}{\lambda_i \sqrt{R_i}}; R_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n R_{ik}; R_{ik} = R_{ki}$ $R_{ik} = (T_i^2 - T_k^2)^2 + 4(\gamma_i - \gamma_k)(\gamma_i T_i^2 - \gamma_k T_k^2) T_i^2 T_k^2$ $\theta_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \operatorname{arctg} \frac{2\lambda_i(\gamma_i - \gamma_k)}{(\gamma_i - \gamma_k)^2 - (\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda_i}{\gamma_i}$ $\lambda_i = \frac{\sqrt{1 - \xi_i^2}}{T_i}$
0	$\frac{b_0 s^2 + b_1 s + 1}{s(T^2 s^2 + 2\xi + 1)(T_1 s + 1)}$ $0 \leq \xi < 1$	$1 + C e^{-\gamma t} (\lambda t - \theta) - C_1 e^{-\alpha t};$ $C = \frac{1}{\lambda T} \sqrt{\frac{\lambda^2 (b_0 - T^2)^2 + [b_1 - \gamma(b_0 + T^2)]^2}{T^2 (1 - 2\gamma T_1) + T_1^2}}$ $C_1 = \frac{b_0 - (b_1 - T_0) T_1}{T^2 (1 - 2\gamma T_1) + T_1^2};$ $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda(T^2 - b_0)}{b_1 - \gamma(b_0 + T^2)} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda T_1}{1 - \gamma T_1};$ $\gamma = \frac{\xi}{T}; \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}; \alpha = \frac{1}{T_1}$
1	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1) \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}$	$1 - C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta) - \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t};$ $C = \frac{(-T)^{n-1}}{\lambda \sqrt{R}};$

	$n \geq 2$ $0 \leq \xi < 1$ $T_i - \text{различни}$	$R = \prod_{i=1}^n R_i; R_i = (1 - 2\gamma T_i)T^2 + T_i^2$ $C_i = \frac{T_i^{n+1}}{R_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (T_i - T_k)}; \gamma = \frac{\xi}{T}; \alpha_i = \frac{1}{T_i}$ $\theta = \sum_{i=1}^n \arctg \frac{\lambda T_i}{\gamma T_i - 1} + \arctg \frac{\lambda}{\gamma}; \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$
--	---	--

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский, В. А., Е. П. Попов. Теория систем автоматического регулирования, Москва, Наука, 1975.
2. Воронов, А. А. др. Теория автоматического управления. Ч. I и II. Москва, Высшая школа, 1986.
3. Воронов, А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Москва, Наука, 1977.
4. Дерусо, П. Р., Р. Рой, Ч. Клоуз. Пространство состояний в теории управления. Москва, Наука, 1970.
5. Иванов, П. С. Динамика на автоматизирани хидро и пневмо системи. Габрово, 1984.
6. Иванов, П. С., Х. Н. Христов, К. Орманджиев.. Синтез на оптимален регулатор на пневматична задвижваща система, сп. "Механика на машините" № 48, кн. 4, 2003, с. 34 – 37.
7. Иванов, П., Христо Н.. Христов. Оптимизация работата на електрохидравлична задвижваща система за получаване на максимална мощност на изхода. сп. Механика на машините, год. VII, кн. 3, 1999, стр. 39-43.
8. Иванов, П., Хр. Христов, К. Орманджиев. "Динамика на автоматизиране на хидравлични и пневматични системи., Габрово, 2004г.
9. Иванов, П., Хр. Христов, К. Орманджиев изследване динамиката на системата водна турбина - автоматичен регулатор чрез построяване диаграмите на качеството, INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE 18 – 19 November 2004, GABROVO.
10. Мумджиян, Г. С. Автоматично управление и регулиране на топлинни процеси. София, Техника, 1987.
11. Наплатанов, Н. Д. Теория на автоматичното регулиране. София, Техника, Т. I Линеини системи, 1971, Т. II Нелинейни системи 1975.
12. Хаджийски, М., К. Велев, Г. Сотиров, И. Калайков. Автоматизация на технологични процеси. Методи и алгоритми за управление. София, Техника, 1992.
13. Христов, Христо Н. Изследване динамиката на вятърен двигател с пряко регулиране, Известия на ТУ Габрово том XXXI, Габрово 2004.
14. Христов, Христо. Н., К. Орманджиев, П. Иванов, Параметрична оптимизация на електропневматична задвижваща система, сп. "Механика на машините" №48, кн. 4, 2003, с. 38 – 41.
15. Христов, Христо Н., П. Иванов. Оптимално управление на електрохидравлична задвижваща система. Научна конференция ЕМФ'2000, ТУ-София, Варна, 25-28 юни 2000, Сборник доклади, т. III, Хидродинамика и хидравлични машини, стр. 53-60.

16. Belanger, P. R., Control Engineering, Saunders, 1995.
17. Chi-Tsong Chen, Linear System Theory and Design Oxford University Press, 1984.
18. D'Azzo, J. J. and C. H. Houpis, Linear Control System Analysis and Design, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1988.
19. DiStefano, J. J., A.R. Stubberud, and I.J. Williams, Feedback and Control Systems, 2nd Edition, McGraw-Hill, Schaum's Outline Series, 1990.
20. Dorf, R. C. and R. H. Bishop, Modern Control Systems, 10th Edition, Prentice Hall, 2005.
21. Eveleigh, E. W., Introduction to Control Systems Design, McGraw-Hill, 1972.
22. Franklin, G. F., J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, 3rd Edition, Addison-Wesley, 1994.
23. Gene F. Franklin, J. David Powell, and Abbas Emami-Naeini Feedback Control of Dynamic Systems Pearson Education Limited, 2020
24. Goodwin, G. C., Graebe, S. F., and Salgado, M. E., Control System Design, Prentice Hall, 2001.
25. Golnaraghi, Farid, Benjamin C. Kuo, Automatic Control Systems, 9th Edition, John Wiley & Sons, INC. 2014.
26. Hristov, H. N., Parametric Optimization of PID Controlled Electrohydraulic Positioning Servo System, Journal of the University of Applied Science Mittweida, Germany, Nr. 9, 2002, pp. 116-121.
27. Kuo, B. C., Automatic Control Systems, 7th Edition, Prentice-Hall, 1995.
28. Lewis, P. H. and Yang, C., Basic Control Systems Engineering, Prentice Hall, 1997.
29. Miron, D. B., Design of Feedback Control Systems, HBJ, 1989.
30. Nise, Norman, Control Systems Engineering, International Student Version, 6th Edition, John Wiley & Sons, INC. 2015.
31. Ogata, K. Modern Control Engineering, 4th Edition, Prentice-Hall, 2002.
32. Phillips, C.L. and Harbor, R.D., Feedback Control Systems, 4th Edition, Prentice Hall, 2000.
33. Rohrs, C. E., Melsa, J. L., and Schultz, D. G., Linear Control Systems, McGraw-Hill, 1993.
34. Rowland, J. R., Linear Control Systems, John Wiley & Sons, 1986.
35. Thaler, G. J., Automatic Control Systems, West, 1989.
36. Van de Vegte, J., Feedback Control Systems, 3rd Edition, Prentice-Hall, 1994.

